PRINCIPIILE MECANICII CLASICE - FORȚE
EXERCIȚII

$\boxed{F = m \cdot a}$ $\boxed{a = \frac{F}{m}}$ $F \Rightarrow a$

$\boxed{F = m \cdot \cancel{a}^{0} = 0}$ (MRU)

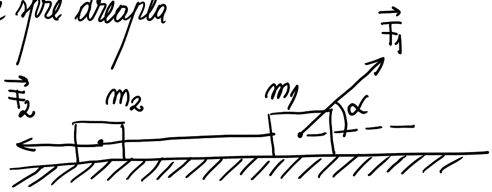
FORȚA DE TRACȚIUNE — F
FORȚA DE GREUTATE — $\boxed{G = m \cdot g}$
FORȚA DE APĂSARE NORMALĂ — N
FORȚA DE FRECARE — $\boxed{F_f = \mu \cdot N}$
FORȚA DE TENSIUNE ÎN FIR — T
FORȚA ELASTICĂ — $\boxed{F_e = k \cdot \Delta l}$ $\boxed{F_e = \left(\frac{E \cdot S}{l_0}\right) \cdot \Delta l}$
FORȚA DE INERȚIE — $\boxed{F_i = m \cdot a}$
FORȚA CENTRIPETĂ ȘI FORȚA CENTRIFUGĂ — $\boxed{F_{cp} = F_{cf} = m \cdot \omega^2 R = m \frac{v^2}{R}}$
FORȚA DE ATRACȚIE UNIVERSALĂ — $\boxed{F_{atr} = k \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}}$

1) Fie sistemul de corpuri din figura alăturată. Se cunosc $m_1 = 4\,kg$, $m_2 = 2\,kg$, $F_1 = 30\,N$, $F_2 = 10{,}95\,N$, $\alpha = 30^\circ$ și $\mu = 0{,}2$. Să se afle:

a) accelerația cu care se mișcă corpurile

b) tensiunea din firul de legătură

c) forța F_1' pentru care sistemul se mișcă uniform spre dreapta



$m_1 = 4\,kg$
$m_2 = 2\,kg$
$F_1 = 30\,N$
$F_2 = 10{,}95\,N$
$\alpha = 30^\circ$
$\mu = 0{,}2$

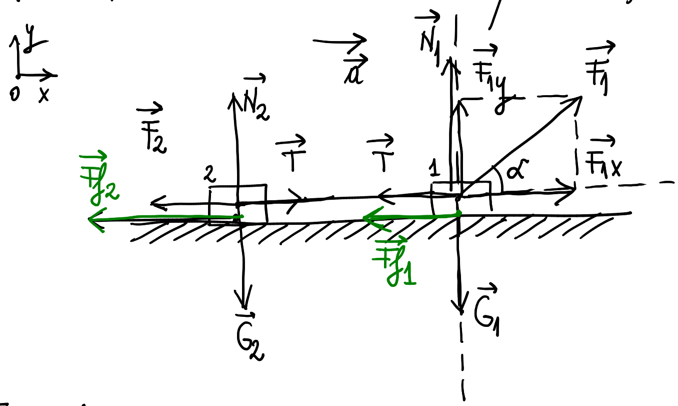
---

a) $a = ?$
b) $T = ?$
c) $F_1' = ?$

a)

$$\begin{cases} F_1 \cos\alpha = 30 \cdot \cancel{\cos 30}^{\sqrt{3}/2} = 25{,}98\,N \\ F_2 = 10{,}95\,N \end{cases}$$

$\Rightarrow F_1 \cos\alpha > F_2$ deci sistemul de corpuri se mișcă înspre dreapta



$$\begin{cases} F_{1x} = F_1 \cos\alpha \\ F_{1y} = F_1 \sin\alpha \end{cases}$$

Principiul II pentru corpul m_1: $\begin{cases} Ox: & F_{1x} - T - Ff_1 = m_1 \cdot a \\ Oy: & N_1 + F_{1y} - G_1 = 0 \end{cases}$ dar $Ff_1 = \mu N_1$

Principiul II pentru corpul m_2: $\begin{cases} Ox: & T - F_2 - Ff_2 = m_2 \cdot a \\ Oy: & N_2 = G_2 \end{cases}$ dar $Ff_2 = \mu N_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_1\cos\alpha - T - \mu N_1 = m_1 a \\ N_1 = m_1 g - F_1 \sin\alpha \end{cases} \text{ înlocuind}$$

$$\begin{cases} T - F_2 - \mu m_2 g = m_2 a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_1\cos\alpha - T - \mu\cdot(m_1 g - F_1 \sin\alpha) = m_1 a \\ T - F_2 - \mu m_2 g = m_2 a \end{cases}$$

$(+)$ $F_1\cos\alpha - F_2 - \mu m_1 g + \mu F_1 \sin\alpha - \mu m_2 g = (m_1 + m_2) a$

$$\Rightarrow a = \frac{F_1\cdot(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - F_2 - \mu g (m_1 + m_2)}{m_1 + m_2}$$

$$a = \frac{F_1(\cos\alpha + \mu \sin\alpha) - F_2}{m_1 + m_2} - \mu g$$

$$a = \frac{30\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 0{,}2\cdot\frac{1}{2}\right) - 10{,}95}{4+2} - 0{,}2\cdot 10 \cong 1\,m/s^2$$

b) $T = m_2 a + \mu m_2 g + F_2$

$T = 2 \cdot 1 + 0{,}2 \cdot 2 \cdot 10 + 10{,}95 = 16{,}95\,N$

c) Principiul II pentru corpul m_1: $\begin{cases} F'_{1x} - T' - F'_{f1} = 0 \\ N'_1 + F'_{1y} - G_1 = 0 \end{cases}$ $\quad F'_{f1} = \mu \cdot N'_1$

Principiul II pentru corpul m_2: $\begin{cases} T' - F_2 - F_{f2} = 0 \\ N_2 = G_2 \end{cases}$ $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} T' &= F_{f2} + F_2 \\ &= \mu \cdot m_2 g + F_2 \\ &= 0{,}2 \cdot 2 \cdot 10 + 10{,}95 \\ &= 14{,}95\,N \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F'_1 \cos\alpha - T' - \mu \cdot (m_1 g - F'_1 \sin\alpha) = 0 \\ T' - F_2 - \mu m_2 g = 0 \end{cases}$$

$$\oplus \quad F'_1 \cos\alpha - F_2 - \mu m_2 g - \mu m_1 g + \mu F'_1 \sin\alpha = 0$$

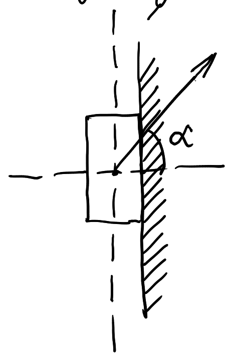
$$F'_1 (\cos\alpha + \mu \sin\alpha) = F_2 + \mu g (m_1 + m_2)$$

$$\Rightarrow F'_1 = \frac{F_2 + \mu g (m_1 + m_2)}{\cos\alpha + \mu \sin\alpha}$$

$$F'_1 = \frac{10{,}95 + 0{,}2 \cdot 10 \cdot 6}{\frac{\sqrt{3}}{2} + 0{,}2 \cdot \frac{1}{2}} = 23{,}75\,N$$

2) Un corp cu masa $m=3kg$ este menținut în repaus pe un perete vertical cu ajutorul unei forțe care formează un unghi $\alpha=30^\circ$ cu orizontala ca în figura alăturată. Dacă între corp și plan există frecare, coeficientul de frecare fiind $\mu=\frac{1}{2\sqrt{3}}$, să se afle:

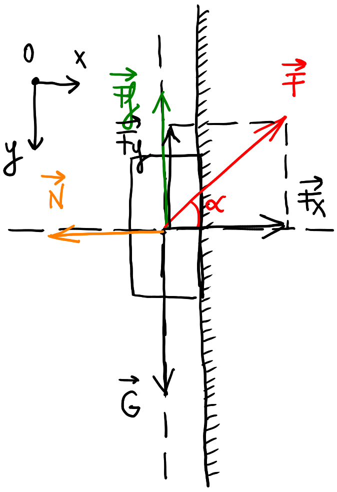
a) valoarea minimă a acestei forțe
b) forța de apăsare exercitată de corp asupra peretelui
c) valoarea forței pentru care corpul urcă accelerat cu accelerația $a=1m/s^2$



$m=3kg$
$\alpha=30^\circ$
$\mu=\frac{1}{2\sqrt{3}}$

a) $F_{min}=?$
b) $N=?$
c) $F'=?$, $a=1m/s^2$

a)



$F_x=F\cos\alpha$
$F_y=F\sin\alpha$

Principiul II $\begin{cases} Ox: & F_x=N \\ Oy: & G=F_y+F_f \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} F\cos\alpha=N \\ mg=F\sin\alpha+\mu N \end{cases}$

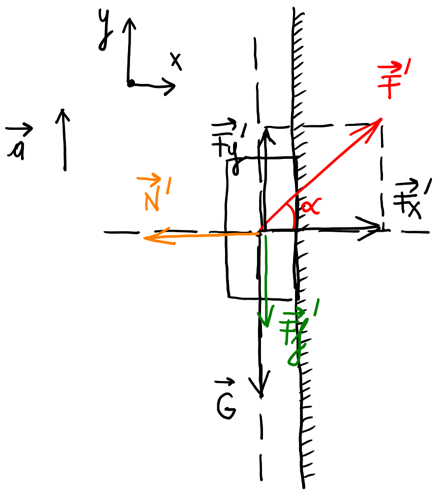
$\Rightarrow mg=F\sin\alpha+\mu F\cos\alpha$

$F=\frac{mg}{\sin\alpha+\mu\cos\alpha}$

$F=\frac{3\cdot 10}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cancel{\sqrt{3}}}\cdot\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{2}}=\frac{30}{\frac{3}{4}}=40N$

b) $N=F\cos\alpha=40\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=20\sqrt{3}=34{,}64N$

c)



$F_x'=F'\cos\alpha$
$F_y'=F'\sin\alpha$

Principiul II $\begin{cases} Ox: & F_x'=N' \\ Oy: & F_y'-F_f'-G=m\cdot a \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} F'\cos\alpha=N' \\ F'\sin\alpha-\mu\cdot N'-mg=ma \end{cases}$

$\Rightarrow F'\sin\alpha-\mu\cdot F'\cos\alpha-mg=ma$

$F'=\frac{ma+mg}{\sin\alpha-\mu\cos\alpha}$

$F'=\frac{3\cdot(1+10)}{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cancel{\sqrt{3}}}\cdot\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{2}}=\frac{33}{\frac{1}{4}}=132N$

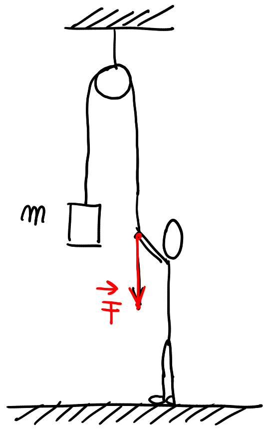
③ Un muncitor având greutatea $G_1 = 1000N$ ridică un sac de masă $m = 80\,kg$ prin intermediul unui cablu trecut peste un scripete ca în figura alăturată. Muncitorul acționează asupra firului cu o forță constantă $F = 900N$. Să se afle:

a) accelerația sacului

b) forța de apăsare exercitată de om asupra planului orizontal

c) accelerația maximă cu care poate fi ridicat sacul fără ca muncitorul să se ridice de pe sol

d) forța de tensiune din cablu, știind că un alt sac cu masa $m' = 40kg$ este ridicat cu aceeași accelerație ca la punctul a)



$G_1 = 1000N$

$m = 80kg$

$F = 900N$

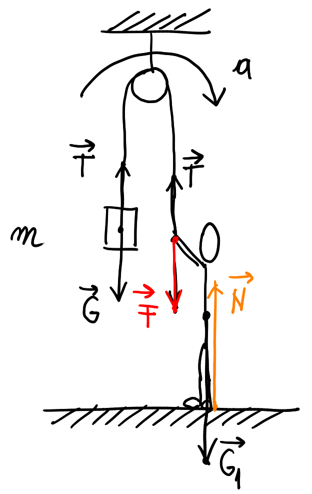
---

a) $a = ?$

b) $N = ?$

c) $a_{max} = ?$, $N = 0$

d) $T'' = ?$, $m' = 40kg$, a



Principiul II

$T - G = ma$ (pentru corpul m)

$F - T = \cancel{m}^0 \cdot a = 0$ (pentru punctul de contact)

$T + N - G_1 = 0$ (pentru om)

a)

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{T-G}{m} \\ F = T \end{cases} \Rightarrow a = \frac{F-G}{m} = \frac{900-800}{80} = 1{,}25\,m/s^2$$

b) $\Rightarrow \quad N = G_1 - T = G_1 - F = 1000 - 900 = 100N$

c) Principiul II

$$\begin{cases} T' - G = m \cdot a' \\ F' - T' = \cancel{m}^0 \cdot a' = 0 \\ T' + \cancel{N'}^0 - G_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow T' = G_1 = F' = 1000N$$

$$\Rightarrow a' = \frac{T'-G}{m} = \frac{1000-800}{80} = 2{,}5\,m/s^2$$

d) $T'' - G = m' \cdot a$

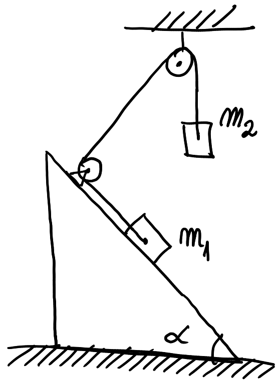
$T'' = m' \cdot a + mg = 40 \cdot 1{,}25 + 40 \cdot 10 = 450N$

④ Fie sistemul din figură. Se cunosc masele $m_1=1kg$, $m_2=0,4kg$, unghiul planului înclinat fix $\alpha=30^\circ$ și se neglijează frecarea. Se lasă liberi cele două corpuri. Să se afle:

a) accelerația corpurilor

b) valorile masei m_2 pentru care accelerația sistemului este $a=2m/s^2$

c) masa m_1 pentru care sistemul rămâne în repaus



$m_1=1kg$

$m_2=0,4kg$

$\alpha=30^0$

---

a) $a=?$

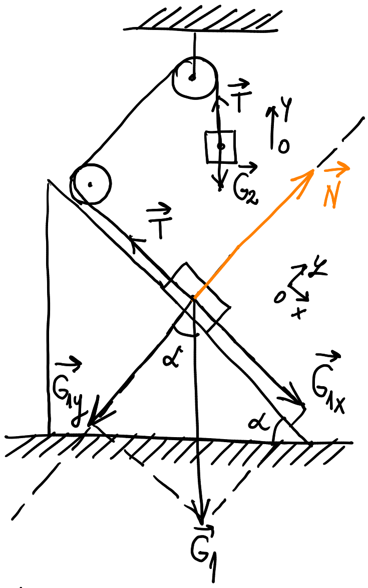
b) $m_2=?$, $a'=2m/s^2$

c) $m_1=?$, repaus

$G_{1x}=G_1\sin\alpha$

$G_{1y}=G_1\cos\alpha$

a)



Principiul II $\quad T-G_2=m_2\cdot a$ (pentru m_2)

$$\begin{cases} ox: & G_{1x}-T=m_1\cdot a \\ oy: & N=G_{1y} \end{cases} \text{(pentru } m_1\text{)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T-m_2g=m_2a \\ m_1g\sin\alpha-T=m_1\cdot a \end{cases}$$

$\oplus \quad m_1g\sin\alpha-m_2g=(m_1+m_2)a$

$$\Rightarrow a=\frac{m_1g\sin\alpha-m_2g}{m_1+m_2}=\frac{1\cdot10\cdot\frac{1}{2}-0,4\cdot10}{1,4}$$

$a=0,71\ m/s^2$

b) Dacă m_1 coboară pe plan cu $a'=2m/s^2$:

$$\begin{cases} T'-m_2'g=m_2'\cdot a' \\ m_1g\sin\alpha-T'=m_1\cdot a' \end{cases}$$

$\oplus \quad m_1g\sin\alpha-m_2'g=m_1a'+m_2'a'$

$m_1g\sin\alpha-m_1a'=m_2'a'+m_2'g$

$$\Rightarrow m_2'=\frac{m_1g\sin\alpha-m_1a'}{a'+g}=\frac{1\cdot10\cdot\frac{1}{2}-1\cdot2}{2+10}=0,250kg$$

Dacă m_1 urcă pe plan cu $a'=2m/s^2$:

$$\begin{cases} m_2''g-T''=m_2''\cdot a' \\ T''-m_1g\sin\alpha=m_1\cdot a' \end{cases}$$

$\oplus \quad m_2''g-m_1g\sin\alpha=m_2''a'+m_1\cdot a'$

$m_2''g-m_2''\cdot a'=m_1\cdot a'+m_1g\sin\alpha$

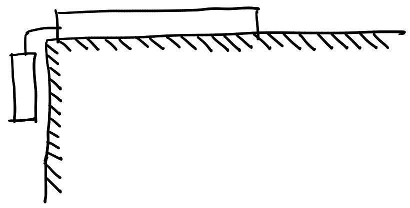
$$\Rightarrow m_2''=\frac{m_1g\sin\alpha+m_1\cdot a'}{g-a'}=\frac{1\cdot10\cdot\frac{1}{2}+1\cdot2}{10-2}=0,875kg$$

c) repaus $\Rightarrow \begin{cases} G_{1x}=T & \text{(pentru } m_1\text{)} \\ T=G_2 & \text{(pentru } m_2\text{)} \end{cases}$

$m_1'g\sin\alpha=m_2g$

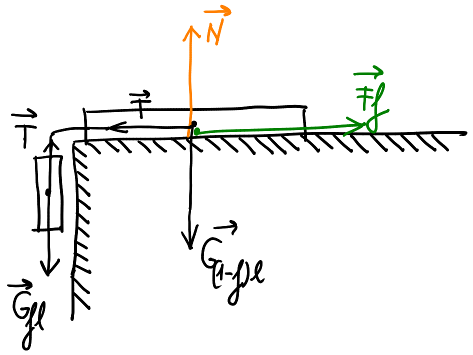
$$\Rightarrow m_1'=\frac{m_2}{\sin\alpha}=\frac{0,4}{\frac{1}{2}}=0,800kg$$

⑤ Un lanț omogen este așezat pe o masă, astfel încât o parte a sa atârnă liber ca în figură. Lanțul începe să alunece în momentul în care partea atârnată constituie o fracțiune $f=0{,}2$ din lungimea lanțului. Să se afle coeficientul de frecare la alunecare dintre lanț și suprafața orizontală.



$f=0{,}2$

$\mu=?$



Regula de trei simplă (Regula direct proporționalității)

$\ell \ldots\ldots\ldots m$

$f\cdot\ell \ldots\ldots\ldots f\cdot m$

$(1-f)\ell \ldots\ldots\ldots (1-f)m$

Chiar cu o clipă înaintea începerii mișcării lanțului (deci în repaus):

Principiul II
$$\begin{cases} G_{f\ell}-T=0 \\ T-F_f=0\end{cases},\quad F_f=\mu\cdot N=\mu\cdot G_{(1-f)\ell}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} f\cdot m\cdot g-T=0 \\ T-\mu\cdot(1-f)\cdot m\cdot g=0\end{cases}$$

(+) $$fmg-\mu(1-f)mg=0$$

$$f-\mu(1-f)=0$$

$$\Rightarrow \mu=\frac{f}{1-f}=\frac{0{,}2}{1-0{,}2}=\frac{2}{8}=0{,}25$$

⑥ Pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha=60^\circ$ cu orizontala se aruncă de jos în sus de-a lungul planului un corp cu viteza inițială $v_0=9{,}9\ m/s$. Mișcarea corpului se face cu frecare, coeficientul de frecare fiind $\mu=0{,}25$. Să se afle:

a) accelerația cu care urcă corpul pe planul înclinat

b) timpul după care se oprește corpul

c) distanța parcursă de corp până la oprire

$\alpha=60^\circ$

$v_0=9{,}9\ m/s$

$\mu=0{,}25$

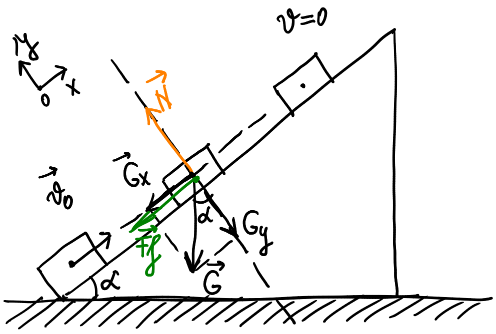
---

a) $a=?$

b) $t_{op}=?$

c) $d=?$

a)



$$\begin{cases} G_y = G\cos\alpha \\ G_x = G\sin\alpha \end{cases}$$

Principiul II $\begin{cases} Ox: & -G_x - F_f = m\cdot a \\ Oy: & N = G_y \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -mg\sin\alpha - \mu\cdot N = m\cdot a \\ N = mg\cos\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad -mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = m\cdot a$$

$$a = -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$$

$$a = -10\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 0{,}25\cdot\frac{1}{2}\right) = -9{,}91\ \frac{m}{s^2}$$

$\Rightarrow$ mișcare frânată

b)

$$v(t) = v_0 + a\cdot t$$

$$v(t) = 9{,}9 - 9{,}9\cdot t$$

$$v(t_{op}) = 9{,}9 - 9{,}9\cdot t_{op} = 0 \Rightarrow t_{op} = 1s$$

c)

Galilei: $\cancel{v^2}^{\,0} = v_0^2 + 2\cdot a\cdot d$

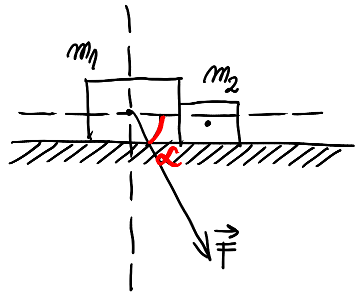
$$\Rightarrow d = \frac{-v_0^2}{2a} = \frac{-9{,}9^2}{2\cdot(-9{,}9)} = \frac{9{,}9}{2} = 4{,}95\ m$$

7. Două corpuri cu masele $m_1 = 300g$ și $m_2 = 200g$ sunt așezate pe un plan orizontal și se află în contact. Se împinge în jos asupra corpului cu masa m_1 cu o forță $F = 5N$ sub un unghi $\alpha = 30^0$ cu orizontala ca în figură. Corpurile se pot deplasa cu frecare, coeficientul de frecare fiind același $\mu = 0,2$. Să se afle:

a) accelerația cu care se deplasează sistemul de corpuri

b) forța cu care m_1 acționează asupra corpului m_2

c) forța de apăsare normală exercitată de m_1 asupra planului orizontal



$m_1 = 300g = 0,3kg$

$m_2 = 200g = 0,2kg$

$F = 5N,\ \alpha = 30^0$

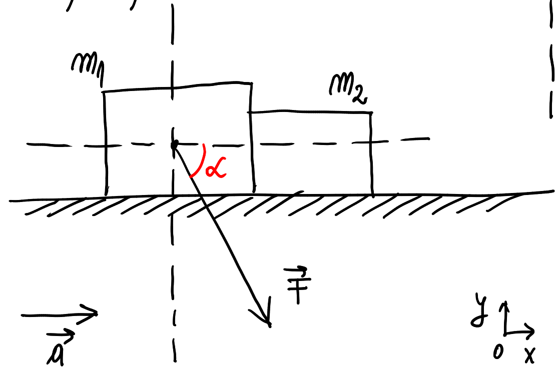
$\mu = 0,2$

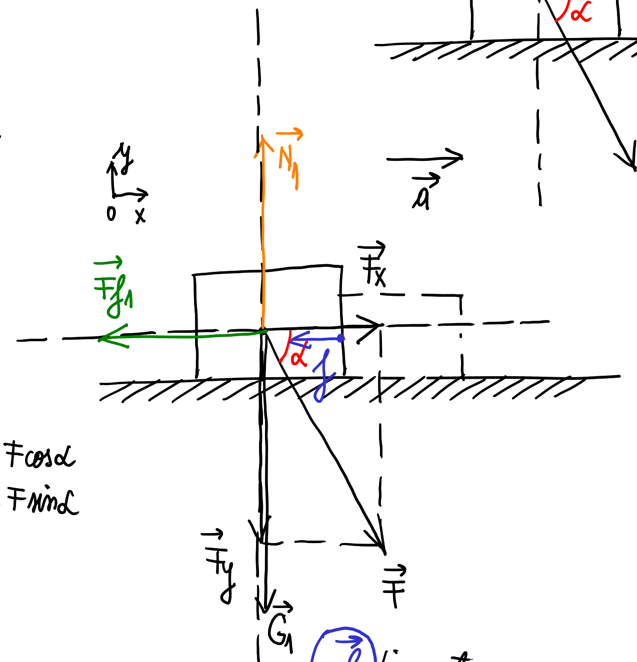
---

a) $a = ?$

b) $f = ?$

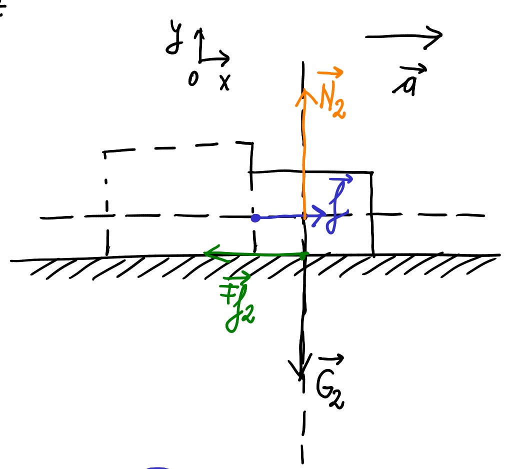
c) $N_1 = ?$





$\vec{f}$ din partea m_2 împiedică avansarea lui m_1

$$\begin{cases} F_x = F\cos\alpha \\ F_y = F\sin\alpha \end{cases}$$



$\vec{f}$ din partea m_1 împinge m_2

Principiul II (pentru m_1) : $\begin{cases} Ox: & F_x - f - F_{f1} = m_1 a \\ Oy: & N_1 - F_y - G_1 = 0 \end{cases}$

Principiul II (pentru m_2) : $\begin{cases} Ox: & f - F_{f2} = m_2 a \\ Oy: & N_2 = G_2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} F\cos\alpha - f - \mu N_1 = m_1 a \\ N_1 = m_1 g + F\sin\alpha \end{cases}$

$\Rightarrow \{ f - \mu m_2 g = m_2 a$

$F\cos\alpha - f - \mu\cdot(m_1 g + F\sin\alpha) = m_1 a$

$f - \mu m_2 g = m_2 a$

$\oplus$ $F\cos\alpha - \mu m_2 g - \mu m_1 g - \mu F\sin\alpha = m_1 a + m_2 a$

$\Rightarrow a = \dfrac{F(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) - \mu g(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2} = \dfrac{F(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)}{m_1 + m_2} - \mu g$

$a = \dfrac{5\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0,2\cdot\frac{1}{2}\right)}{0,5} - 0,2\cdot 10 = 5,66\ \frac{m}{s^2}$

b) $f = m_2 a + \mu m_2 g$

$= 0,2\cdot 5,66 + 0,2\cdot 0,2\cdot 10$

$= 1,53N$

c) $N_1 = F_y + G_1$

$= F\sin\alpha + m_1 g$

$= 5\cdot\frac{1}{2} + 0,3\cdot 10$

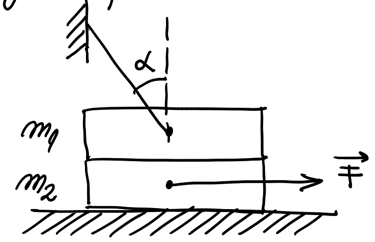
$= 5,5N$

(8) Pe un plan orizontal se află două cărămizi, cea inferioară are masa $m_2 = 2\,kg$, iar cea superioară are masa $m_1 = 1\,kg$. Cărămida superioară este legată de un perete vertical cu un cablu care formează cu verticala unghiul $\alpha = 45°$ ca în figură. Între cărămizi există frecare, coeficientul de frecare la alunecare fiind $\mu = 0{,}2$. Se neglijează frecarea dintre cărămida inferioară și plan. Cărămida inferioară este trasă de o forță $\vec{F}$ pentru a o scoate de sub cea superioară. Să se afle:

a) tensiunea în fir

b) forța minimă F_{min} cu care trebuie trasă cărămida inferioară

c) forța cu care apasă cărămida inferioară pe planul orizontal



$m_1 = 1\,kg$

$m_2 = 2\,kg$

$\alpha = 45°$

$\mu = 0{,}2$

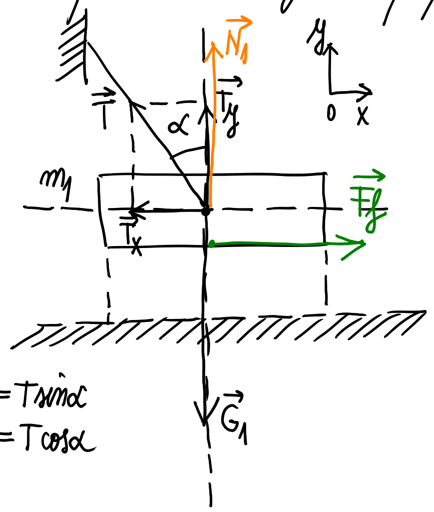
---

a) $T = ?$

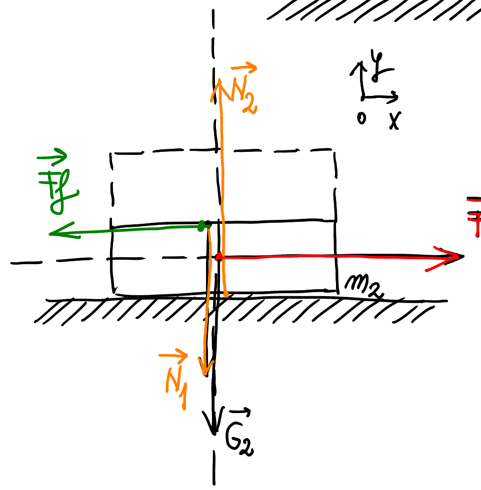
b) $F_{min} = ?$

c) $N_2 = ?$

a)



$$\begin{cases} T_x = T\sin\alpha \\ T_y = T\cos\alpha \end{cases}$$



Chiar cu o clipă înainte ca m_2 - cărămida inferioară să înceapă să se miște (deci suntem încă în repaus), scriem Principiul II

Principiul II (pentru m_1)
$$\begin{cases} Ox: & F_f - T_x = 0 \\ Oy: & N_1 + T_y - G_1 = 0 \end{cases}$$

Principiul II (pentru m_2)
$$\begin{cases} Ox: & F - F_f = 0 \\ Oy: & N_2 - N_1 - G_2 = 0 \end{cases}$$

! **Obs** La suprafața de contact a două corpuri, forțele de frecare apar în perechi asupra ambelor corpuri:

→ Observați cum cărămida inferioară m_2 resimte o forță de frecare $\vec{F_f}$ din frecarea cu cărămida superioară m_1, forța de frecare care se opune avansării lui m_2.

→ Observați cum cărămida superioară m_1 resimte și ea frecarea de dedesubt, forța de frecare $\vec{F_f}$ trăgând cărămida superioară după cărămida inferioară

! **Obs** Cărămida superioară m_1 este trasă înspre dreapta de către forța de frecare $\vec{F_f}$ de dedesubt.

→ Observați cum forța de frecare $\vec{F_f}$ poate juca rol de forță de tracțiune!

! **Obs** Cărămida inferioară m_2 resimte pe lângă forțele $\vec{G_2}, \vec{F}, \vec{F_f}$ și o apăsare din partea cărămizii situată superior.

→ Observați cum apăsarea din partea cărămizii superioare m_1 nu este G_1, greutatea ei, ci ușor mai puțin $G_1 - T_y$! Asta pentru că tensiunea din fir preia o parte din greutatea cărămizii $m_1 \Rightarrow$ apăsarea resimțită este $N_1 = G_1 - T_y$!

Principiul II (pentru m_1)
$$\begin{cases} Ox: & F_f - T_x = 0 \\ Oy: & N_1 + T_y - G_1 = 0 \end{cases}$$

Principiul II (pentru m_2)
$$\begin{cases} Ox: & F - F_f = 0 \\ Oy: & N_2 - N_1 - G_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu \cdot N_1 - T\sin\alpha = 0 \\ N_1 + T\cos\alpha - m_1 g = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} F - \mu \cdot N_1 = 0 \\ N_2 = N_1 + m_2 g \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mu \cdot (m_1 g - T\cos\alpha) - T\sin\alpha = 0$$

$$\mu m_1 g - \mu T\cos\alpha - T\sin\alpha = 0$$

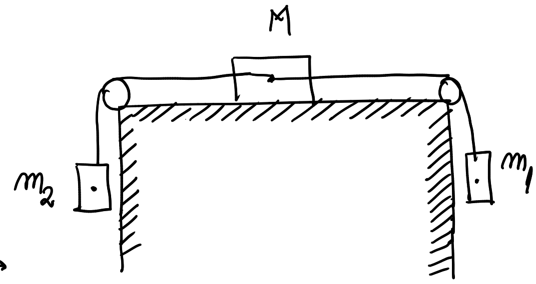
$$T = \frac{\mu m_1 g}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} = \frac{0{,}2 \cdot 1 \cdot 10}{\frac{\sqrt{2}}{2} + 0{,}2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4}{1{,}2\sqrt{2}} = 2{,}35\,N$$

b)
$$F - F_f = 0$$
$$F = F_f = \mu \cdot N_1 = \mu \cdot (m_1 g - T\cos\alpha)$$
$$= 0{,}2 \cdot \left(1 \cdot 10 - 2{,}35 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$= 1{,}67\,N$$

c)
$$N_2 = N_1 + G_2 = (m_1 g - T\cos\alpha) + m_2 g$$
$$= \left(1 \cdot 10 - 2{,}35 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2 \cdot 10$$
$$= 28{,}33\,N$$

(9) De corpul cu masa $M=4kg$ care se poate deplasa cu frecare pe un plan orizontal, coeficientul de frecare la alunecare fiind $\mu=0{,}25$ sunt prinse două fire ideale ce trec peste câte un scripete ideal. De aceste fire sunt prinse două corpuri verticale cu masele $m_1=5kg$ și $m_2=1kg$ ca în figură. Să se afle:

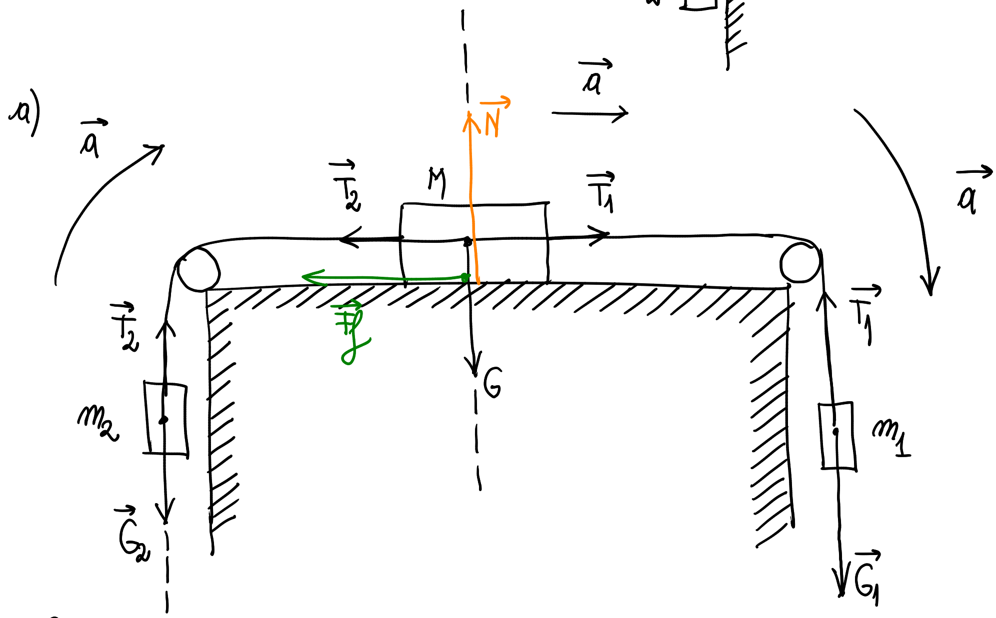
a) accelerația cu care se mișcă sistemul
b) tensiunile din cele două fire de legătură
c) masa m_1' pentru care sistemul se mișcă uniform în același sens ca la punctul a)



$M=4kg$
$\mu=0{,}25$
$m_1=5kg$
$m_2=1kg$

a) $a=?$
b) $T_1=?, T_2=?$
c) $m_1'=?$, MRU

a)



Principiul II
$$\begin{cases} G_1 - T_1 = m_1 a & (\text{pentru } m_1) \\ T_1 - T_2 - F_f = Ma & (\text{pentru } M) \\ T_2 - G_2 = m_2 a & (\text{pentru } m_2) \end{cases}$$

(+) $$G_1 - F_f - G_2 = (m_1 + m_2 + M)a$$

$$\Rightarrow a = \frac{m_1 g - \mu M g - m_2 g}{m_1 + m_2 + M} = \frac{5\cdot 10 - 0{,}25\cdot 4\cdot 10 - 1\cdot 10}{5+1+4} = 3\,m/s^2$$

b) $T_1 = m_1 g - m_1 a = 5\cdot(10-3) = 35N$

$T_2 = m_2 a + m_2 g = 1\cdot(3+10) = 13N$

c) Mișcare uniformă $\Rightarrow$ Principiul II
$$\begin{cases} G_1' - T_1' = 0 & (\text{pentru } m_1') \\ T_1' - T_2' - F_f = 0 & (\text{pentru } M) \\ T_2' - G_2 = 0 & (\text{pentru } m_2) \end{cases}$$

(+) $$G_1' - F_f - G_2 = 0$$

$$m_1' g - \mu M g - m_2 g = 0$$

$$\Rightarrow m_1' = \frac{m_2 g + \mu M g}{g} = m_2 + \mu M = 1 + 0{,}25\cdot 4 = 2\,kg$$

! Obs

$T_1' = m_1' g = 20N$

$T_2' = m_2 g = 10N$

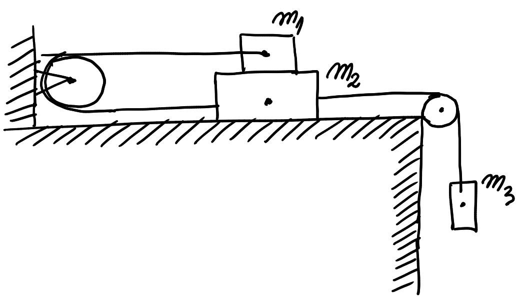
tensiunile firelor sunt mai mici în mișcarea uniformă!

(10) Fie corpurile cu masele $m_1 = 2kg$, $m_2 = 3kg$ și $m_3 = 10\,kg$ din desenul alăturat. Între cele două corpuri aflate pe suprafața orizontală este frecare cu $\mu_1 = 0{,}2$ și între corp și masă este frecare cu $\mu_2 = 0{,}1$. Să se afle:

a) accelerația sistemului de corpuri

b) tensiunile din fire

c) masa m_3' care determină deplasarea uniformă a sistemului în același sens



$m_1 = 2kg$

$m_2 = 3kg$

$m_3 = 10\,kg$

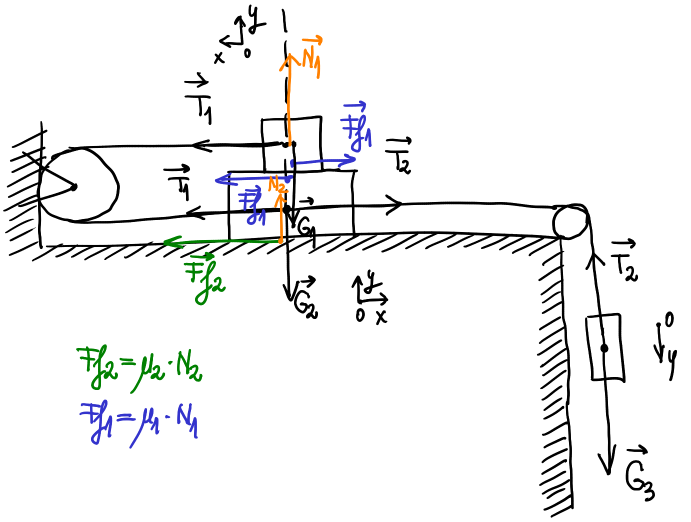
$\mu_1 = 0{,}2$

$\mu_2 = 0{,}1$

a) $a = ?$

b) $T_1 = ?$, $T_2 = ?$

c) $m_3' = ?$, MRU



$F_{f2} = \mu_2 \cdot N_2$

$F_{f1} = \mu_1 \cdot N_1$

Principiul II (pentru m_1): $\begin{cases} Ox: T_1 - F_{f1} = m_1 \cdot a \\ Oy: N_1 = G_1 \end{cases}$

Principiul II (pentru m_2): $\begin{cases} Ox: T_2 - F_{f1} - F_{f2} - T_1 = m_2 \cdot a \\ Oy: N_2 = G_2 + N_1 \end{cases}$

Principiul II (pentru m_3): $\{ Oy: G_3 - T_2 = m_3 \cdot a$

$\Rightarrow T_1 - \mu_1 G_1 = m_1 a$

$\Rightarrow T_2 - \mu_1 G_1 - \mu_2(G_2 + G_1) - T_1 = m_2 a$

$\Rightarrow G_3 - T_2 = m_3 \cdot a$

$$\begin{cases} T_1 - \mu_1 m_1 g = m_1 a \\ T_2 - \mu_1 m_1 g - \mu_2(m_2 g + m_1 g) - T_1 = m_2 a \\ m_3 g - T_2 = m_3 a \end{cases}$$

$(+)\quad m_3 g - 2\mu_1 m_1 g - \mu_2(m_1 + m_2) g = a(m_1 + m_2 + m_3)$

$$\Rightarrow a = \frac{m_3 g - 2\mu_1 m_1 g - \mu_2(m_1+m_2)g}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$a = \frac{10\cdot 10 - 2\cdot 0{,}2\cdot 2\cdot 10 - 0{,}1\cdot(2+3)\cdot 10}{2+3+10} = \frac{100-8-5}{15} = 5{,}8\,\frac{m}{s^2}$$

b) $T_1 = m_1 a + \mu_1 m_1 g = 2\cdot 5{,}8 + 0{,}2\cdot 2\cdot 10 = 15{,}6\,N$

$T_2 = m_3 g - m_3 a = 10\cdot 10 - 10\cdot 5{,}8 = 42\,N$

c) Mișcare uniformă $\Rightarrow$

Principiul II: $\begin{cases} T_1' - F_{f1} = 0 \text{ (pentru } m_1) \\ T_2' - F_{f1} - F_{f2} - T_1' = 0 \text{ (pentru } m_2) \\ G_3' - T_2' = 0 \text{ (pentru } m_3) \end{cases}$

$(+)\quad G_3' - 2\cdot F_{f1} - F_{f2} = 0$

$m_3' g - 2\cdot\mu_1\cdot m_1 g - \mu_2\cdot(m_1+m_2) g = 0$

$\Rightarrow m_3' = 2\mu_1 m_1 + \mu_2(m_1+m_2)$

$m_3' = 2\cdot 0{,}2\cdot 2 + 0{,}1\cdot(2+3)$

$m_3' = 1{,}3\,kg$

11) De tavanul unui lift este suspendat un dinamometru (resort) cu constanta elastică $K = 200 N/m$ de care atârnă un corp cu masa $m = 1 kg$. Să se afle ce forță indică dinamometrul dacă liftul:

a) urcă cu accelerația $a = 0,8 m/s^2$

b) coboară accelerat cu accelerația $a = 0,8 m/s^2$

c) se deplasează uniform

$K = 200 N/m$

$m = 1 kg$

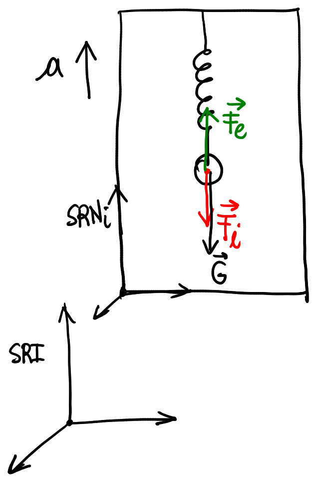
---

a) $F_e = ?$, $a = 0,8 \frac{m}{s^2}$ în urcare

b) $F_e = ?$, $a = 0,8 \frac{m}{s^2}$ în coborâre

c) $F_e = ?$, $a = 0$, MRU

a)



Principiul II

în SRI : $F_e - G = ma$ (MRUV)

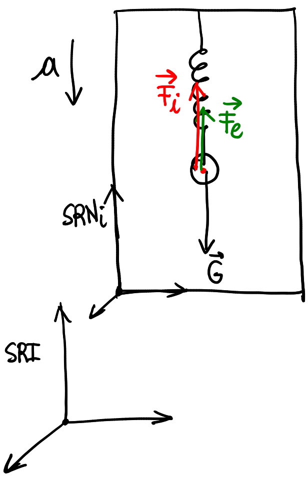
în SRNi : $F_e - G - F_i = 0$ (repaus)

$F_e = m \cdot a + mg$

$= 1 \cdot 0,8 + 1 \cdot 10$

$= 10,8 N$

b)



Principiul II

în SRI : $G - F_e = ma$ (MRUV)

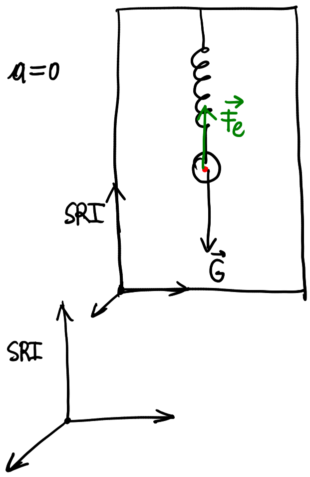
în SRNi : $G - F_e - F_i = 0$ (repaus)

$F_e = m \cdot g - ma$

$= 1 \cdot 10 - 1 \cdot 0,8$

$= 9,2 N$

c)



Principiul II

$F_e - G = 0$

$F_e = mg$

$= 1 \cdot 10$

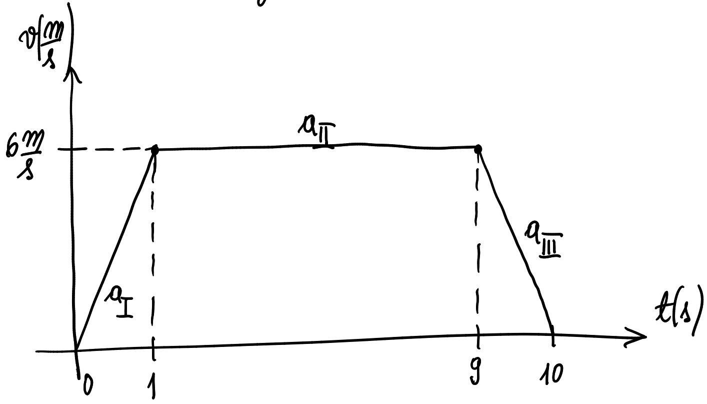
$= 10 N$

(12) De tavanul unui ascensor este suspendat prin intermediul unui resort un corp de iluminat cu masa $m = 500g$. Lungimea nedeformată a resortului este $l_0 = 20cm$. Graficul alăturat reprezintă viteza ascensorului în timpul mișcării de la parter până la ultimul etaj. Să se afle:

a) constanta elastică a resortului dacă deformarea datorată atârnării corpului de iluminat este $\Delta l = 1cm$ când $t \in (1,9)s$

b) lungimea deformată a resortului în cea de-a treia etapă a mișcării

c) numărul de nivele ale clădirii dacă distanța dintre două etaje succesive este $h_0 = 3m$



$m = 500g = 0{,}5kg$

$l_0 = 20cm = 0{,}2m$

---

a) $\Delta l = 1cm,\ t \in (1,9)s \Rightarrow K = ?$

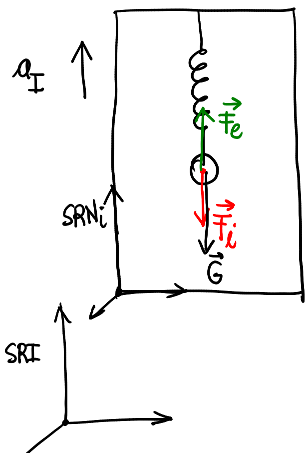
b) $l = ?,\ t \in (9,10)s$

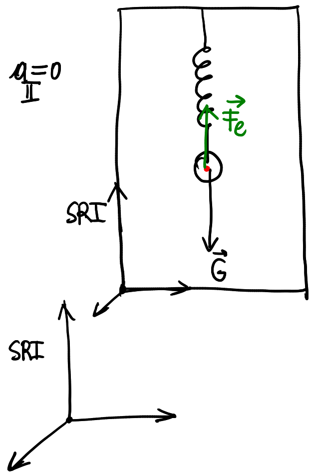
c) $N = ?,\ h_0 = 3m$

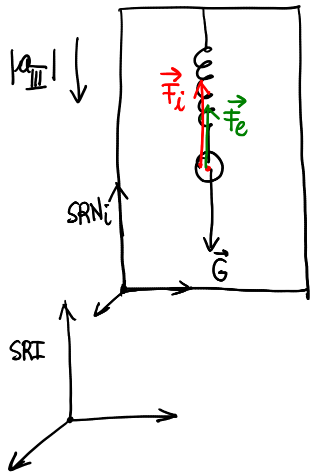
$$a_I = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{6\frac{m}{s}}{1s} = 6\frac{m}{s^2} \text{ (mișcare accelerată)}$$

$$a_{II} = 0\frac{m}{s^2},\quad v = const = 6\frac{m}{s} \text{ (mișcare uniformă)}$$

$$a_{III} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-6\frac{m}{s}}{1s} = -6\frac{m}{s^2} \text{ (mișcare frânată)}$$







Principiul II

în SRI : $F_e - G = m a_I$ (MRUV)

în SRNi : $F_e - G - F_i = 0$ (repaus)

$F_e = m \cdot a_I + mg$

$= 0{,}5 \cdot 6 + 0{,}5 \cdot 10$

$= 8N$

Principiul II

$F_e - G = 0$

$F_e = mg$

$= 0{,}5 \cdot 10$

$= 5N$

$F_e = K \cdot \Delta l$

$$\Rightarrow K = \frac{F_e}{\Delta l} = \frac{5}{0{,}01} = 500\frac{N}{m}$$

a)

Principiul II

în SRI : $G - F_e = ma$ (MRUV)

în SRNi : $G - F_e - F_i = 0$ (repaus)

$F_e = m \cdot g - ma$

$= 0{,}5 \cdot 10 - 0{,}5 \cdot 6$

$= 2N$

$F_e = K \cdot (l - l_0)$

$$\Rightarrow l = \frac{F_e}{K} + l_0 = \frac{2}{500} + 0{,}2 = 0{,}204m$$

$l = 20{,}4cm$

b)

c) $$d = A_{trapez} = 2\left(\frac{C_1 \cdot C_2}{2}\right) + L \cdot l = 6 \cdot 1 + 6 \cdot 8 = 54m$$

$$N = \frac{d}{h_0} + 1 = \frac{54}{3} + 1 = 19$$

(13) Un corp cu masa $m = 1{,}115\,kg$ este așezat pe o scândură orizontală și în același timp suspendat printr-un resort vertical nedeformat de lungime $l_0 = 10\,cm$ și constantă elastică $K = 50\,N/m$ (poziția A). Scândura este suficient de lungă și este trasă orizontal iar când resortul deviază cu $\alpha = 60°$ față de verticală (poziția B) corpul începe să se deplaseze. Să se afle:

a) coeficientul de frecare la alunecare dintre corp și scândură

b) forța cu care corpul apasă asupra scândurii când resortul este deviat

c) accelerația corpului în momentul trecerii acestuia prin poziția A, dacă scândura este trasă mult iar corpul alunecă înspre A depășind această poziție

$m = 1{,}115\,kg$

$l_0 = 10\,cm = 0{,}1\,m$

$K = 50\,\frac{N}{m}$

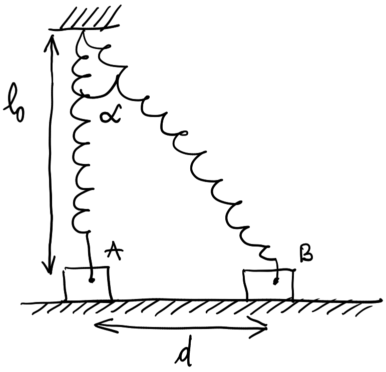
$\alpha = 60°$

---

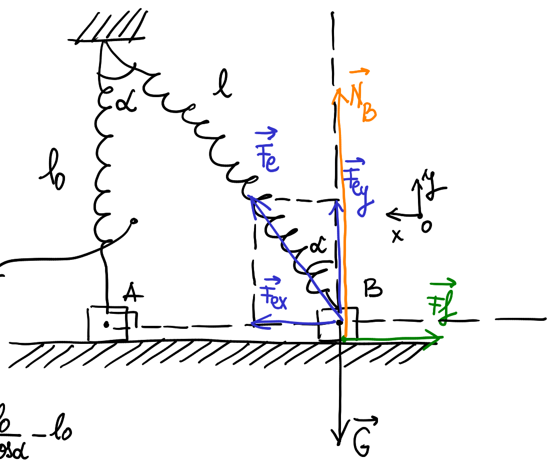
a) $\mu = ?$

b) $N_B = ?$

c) $a = ?$, A



a)



$\cos\alpha = \frac{l_0}{l}$

$\Rightarrow l = \frac{l_0}{\cos\alpha}$

$\Rightarrow \Delta l = l - l_0 = \frac{l_0}{\cos\alpha} - l_0$

$$\begin{cases} F_{ex} = F_e \sin\alpha \\ F_{ey} = F_e \cos\alpha \end{cases}$$

Scriem Principiul II chiar cu o clipă înaintea alunecării corpului din poziția B spre poziția A (deci încă suntem la limită în repaus):

$$\text{Principiul II} \begin{cases} Ox: & F_{ex} - F_f = 0 \\ Oy: & N_B + F_{ey} - G = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_e \sin\alpha - \mu N_B = 0 \\ N_B = mg - F_e\cos\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow (K\cdot\Delta l)\sin\alpha - \mu\cdot\left[mg - (K\cdot\Delta l)\cos\alpha\right] = 0$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{K\cdot\Delta l\cdot\sin\alpha}{mg - K\cdot\Delta l\cos\alpha} = \frac{K\cdot l_0\left(\frac{1}{\cos\alpha}-1\right)\sin\alpha}{mg - K\cdot l_0\left(\frac{1}{\cos\alpha}-1\right)\cos\alpha}$$

$$\mu = \frac{50\cdot 0{,}1\cdot\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}-1\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{1{,}115\cdot 10 - 50\cdot 0{,}1\cdot\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}-1\right)\cdot\frac{1}{2}} = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{2}}{11{,}15 - 2{,}5} = 0{,}50$$

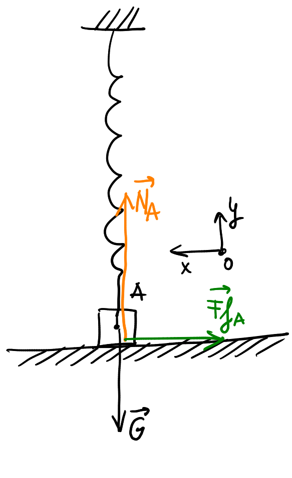
b)

$$N_B = mg - K\cdot l_0\cdot\left(\frac{1}{\cos\alpha}-1\right)\cdot\cos\alpha$$

$$= 1{,}115\cdot 10 - 50\cdot 0{,}1\cdot\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}-1\right)\cdot\frac{1}{2}$$

$$= 11{,}15 - 2{,}5 = 8{,}65\,N$$

c)



Principiul II

$-F_{fA} = m\cdot a$

$-\mu\cdot N_A = m\cdot a$

$-\mu \cancel{m} g = \cancel{m}\cdot a$

$\Rightarrow a = -\mu g$

$= -0{,}5\cdot 10$

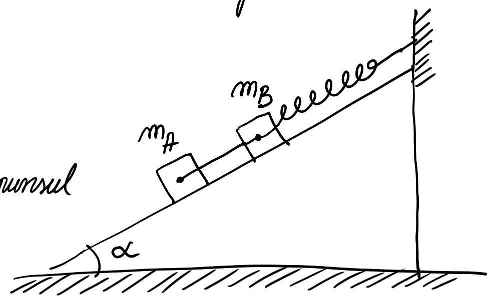
$= -5\,\frac{m}{s^2}$

(14) Două corpuri A și B cu masele $m_A=2kg$ și $m_B=1kg$, legate între ele printr-un fir inextensibil și de masă neglijabilă, se află pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha=30^\circ$ față de orizontală, ca în figura alăturată. Corpurile sunt prinse de un perete vertical prin intermediul unui resort fără masă, cu constanta de elasticitate $K=150N/m$. Între corpuri și suprafața planului există frecări ($\mu=0,173$), iar sistemul se află în echilibru. Să se afle:

a) forța de tensiune din firul care leagă corpurile

b) alungirea resortului care susține sistemul de corpuri

c) dacă alungirea resortului se modifică în situația în care se schimbă între ele pozițiile celor două corpuri. Justificați răspunsul



$m_A=2kg$

$m_B=1kg$

$\alpha=30^\circ$

$K=150N/m$

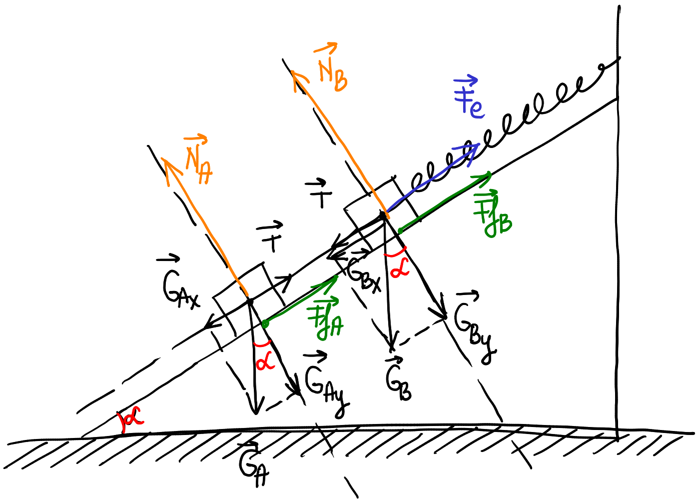
$\mu=0,173$

---

a) $T=?$

b) $\Delta l=?$

c) $\Delta l'=?$



$G_{Ax}=G_A\sin\alpha$

$G_{Ay}=G_A\cos\alpha$

$G_{Bx}=G_B\sin\alpha$

$G_{By}=G_B\cos\alpha$

Principiul II (pentru m_A): $\begin{cases} Ox: & G_{Ax}-T-F_{fA}=0 \\ Oy: & N_A=G_{Ay} \end{cases}$

Principiul II (pentru m_B): $\begin{cases} Ox: & T+G_{Bx}-F_e-F_{fB}=0 \\ Oy: & N_B=G_{By} \end{cases}$

$\Rightarrow m_A g\sin\alpha - T - \mu\cdot m_A g\cos\alpha=0$

$\Rightarrow T+m_B g\sin\alpha - K\cdot\Delta l-\mu m_B g\cos\alpha=0$

$\oplus$

$\Rightarrow m_A g\sin\alpha-\mu m_A g\cos\alpha+m_B g\sin\alpha-K\cdot\Delta l-\mu m_B g\cos\alpha=0$

b) $\Rightarrow \Delta l=\dfrac{(m_A+m_B)g\sin\alpha-\mu g(m_A+m_B)\cos\alpha}{K}$

$\Delta l=\dfrac{(2+1)\cdot10\cdot\frac{1}{2}-0,173\cdot10(2+1)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{150}=\dfrac{15-4,5}{150}=0,07m=7cm$

a) $T=m_A g\sin\alpha-\mu m_A g\cos\alpha$

$=2\cdot10\cdot\frac{1}{2}-0,173\cdot2\cdot10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=7N$

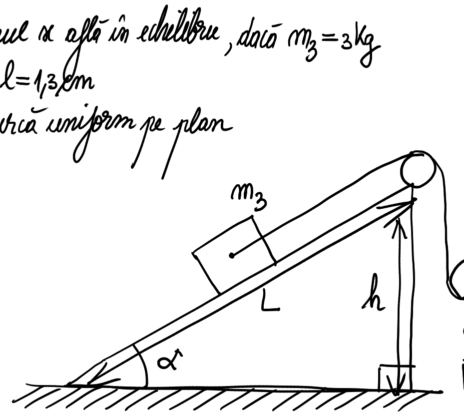
c) Principiul II (pentru m_B și m_A interschimbate) $\quad G_{Bx}+G_{Ax}-F_{fA}-F_{fB}-F_e'=0$

$\Rightarrow F_e'=K\Delta l'=(m_A+m_B)g\sin\alpha-\mu g(m_A+m_B)\cos\alpha$

$\Rightarrow \Delta l'=\Delta l=\dfrac{(m_A+m_B)g\sin\alpha-\mu g(m_A+m_B)\cos\alpha}{K}$

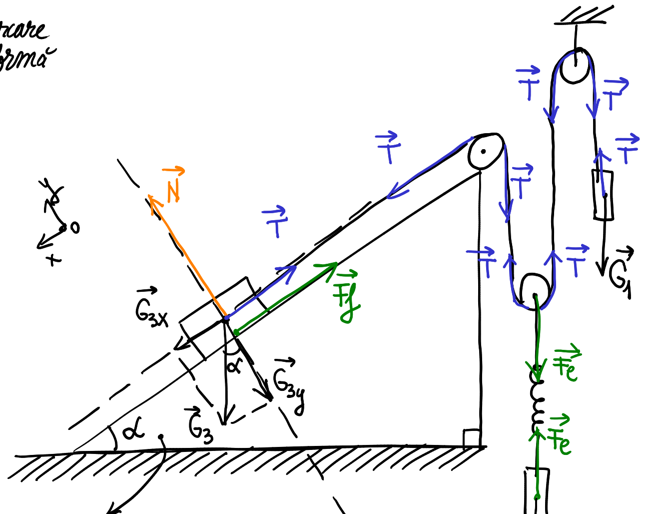
(15) Fie sistemul mecanic din figură. Lungimea planului înclinat este $L=4m$ și înălțimea planului înclinat este $h=2m$. Forța de frecare dintre corpul m_3 și plan este $F_f=2N$. Să se afle:

a) valorile minime ale maselor m_1 și m_2 pentru care sistemul se află în echilibru, dacă $m_3=3kg$
b) constanta elastică a resortului dacă acesta se alungește cu $\Delta l=1,3cm$
c) valorile maselor m_1 și m_2 pentru care corpul $m_3=3kg$ urcă uniform pe plan



$L=4m$
$h=2m$
$F_f=2N$

a) $m_1, m_2=?$, repaus
b) $K=?$, $\Delta l=1,3cm$
c) $m_1, m_2=?$, $m_3=3kg$ în urcare uniformă



$G_{3x}=G_3\sin\alpha$
$G_{3y}=G_3\cos\alpha$

$\sin\alpha=\frac{CO}{IP}=\frac{h}{L}=\frac{1}{2}$
$\Rightarrow \alpha=30^\circ$

a) repaus

Principiul II (pentru m_3) $\begin{cases} OX: G_{3x}-T-F_f=0 \\ OY: N=G_{3y} \end{cases}$

Principiul II (pentru scripetele mobil) $\{ 2T=F_e$

Principiul II (pentru m_2): $\{ F_e=G_2$

Principiul II (pentru m_1): $\{ T=G_1$

$T=G_1 \Rightarrow T=m_1 g$
$F_e=G_2 \Rightarrow F_e=m_2 g$
$2T=F_e \Rightarrow 2\cdot(m_1 g)=m_2 g \Rightarrow m_2=2m_1$

$G_{3x}-T-F_f=0 \Rightarrow m_3 g\sin\alpha - m_1 g - F_f=0 \Rightarrow m_1=\frac{m_3 g\sin\alpha-F_f}{g}$

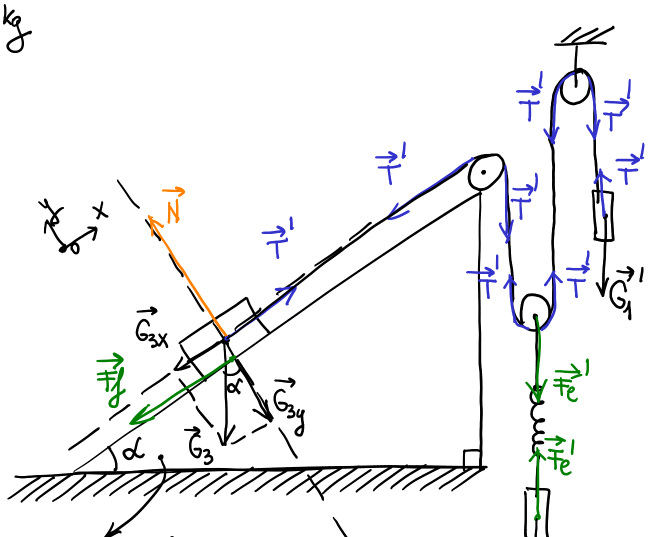
$m_1=\frac{3\cdot10\cdot\frac{1}{2}-2}{10}=1,3kg$

$m_2=2m_1=2,6kg$

b) $F_e=k\cdot\Delta l=m_2\cdot g$

$\Rightarrow k=\frac{m_2 g}{\Delta l}=\frac{2,6\cdot10}{0,013}=\frac{26}{\frac{13}{1000}}=2000\frac{N}{m}$

c) Se schimbă sensul de mișcare $\Rightarrow$ se schimbă sensul forței de frecare, care rămâne în modul același pentru că $F_f=\mu m_3 g\cos\alpha$



$\sin\alpha=\frac{CO}{IP}=\frac{h}{L}=\frac{1}{2}$
$\Rightarrow \alpha=30^\circ$

$T'=G_{3x}+F_f=m_3 g\sin\alpha+F_f=3\cdot10\cdot\frac{1}{2}+2=17N$

Principiul II (m_1'): $T'-G_1'=0 \Rightarrow m_1' g=T' \Rightarrow m_1'=\frac{T'}{g}=\frac{17}{10}=1,7kg$

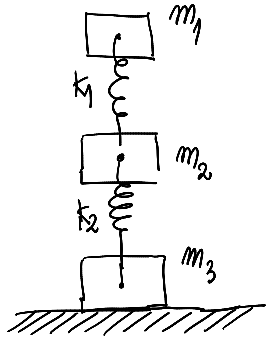
Principiul II (m_2'): $F_e'-G_2'=0 \Rightarrow m_2' g=F_e'=2T' \Rightarrow m_2'=\frac{2T'}{g}=\frac{2\cdot17}{10}=3,4kg$

(16) Un corp cu masa $m_3=500g$ se sprijină pe o suprafață plană. De acest corp este prins un resort vertical cu constanta elastică $k_2=60N/m$ peste care se află un alt corp cu masa $m_2=300g$. De corpul al doilea este prins un al doilea resort vertical cu constanta elastică $k_1=20N/m$, pe care se așază un corp cu masa $m_1=200g$ ca în figură. Să se afle:

a) raportul comprimărilor $\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2}$

b) valoarea forței cu care trebuie apăsat vertical corpul superior m_1 pentru ca raportul comprimărilor $\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2}$ să devină egal cu 2

c) valoarea forței de apăsare exercitată de corpul m_3 asupra suprafeței de sprijin în condițiile punctului b)



$m_1=200g=0,2kg$

$m_2=300g=0,3kg$

$m_3=500g=0,5kg$

$k_1=20N/m$

$k_2=60N/m$

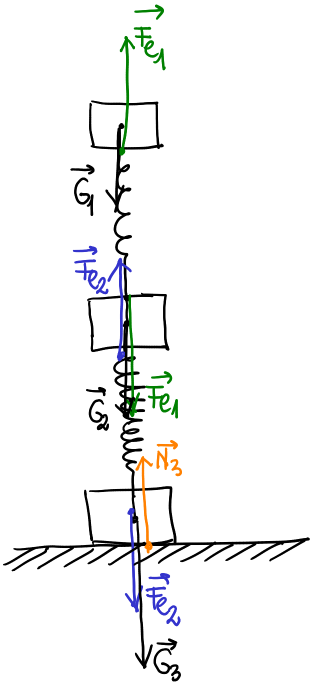
---

a) $\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2}=?$

b) $\frac{\Delta l_1'}{\Delta l_2'}=2$, $F=?$

c) $N_3=?$

a)



$F_{e_1}=k_1\cdot\Delta l_1$

$F_{e_2}=k_2\cdot\Delta l_2$

Principiul II

$F_{e_1}-G_1=0$ (pentru m_1)

$F_{e_2}-F_{e_1}-G_2=0$ (pentru m_2)

$N_3-F_{e_2}-G_3=0$ (pentru m_3)

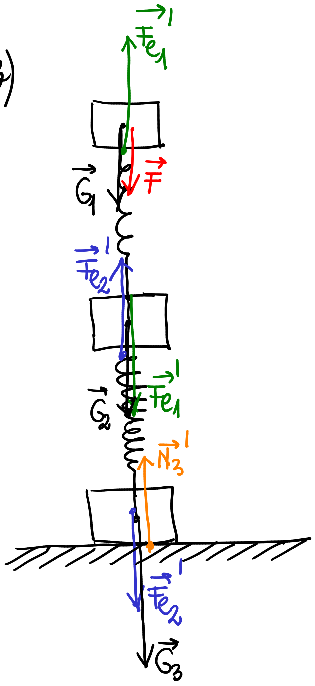
$\Rightarrow k_1\Delta l_1=m_1g \Rightarrow \Delta l_1=\frac{m_1g}{k_1}$

$\Rightarrow k_2\Delta l_2-k_1\Delta l_1-m_2g=0 \Rightarrow \Delta l_2=\frac{m_1g+m_2g}{k_2}$

$\Rightarrow \frac{\Delta l_1}{\Delta l_2}=\frac{\frac{m_1\cancel{g}}{k_1}}{\frac{(m_1+m_2)\cancel{g}}{k_2}}=\frac{\frac{0,2}{20}}{\frac{0,5}{60}}=\frac{2}{5}\cdot 3=\frac{6}{5}$

$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2}=1,2$

b)



$F_{e_1}=k_1\cdot\Delta l_1$

$F_{e_2}=k_2\cdot\Delta l_2$

Principiul II

$F_{e_1}'-G_1-F=0$ (pentru m_1)

$F_{e_2}'-F_{e_1}'-G_2=0$ (pentru m_2)

$N_3'-F_{e_2}'-G_3=0$ (pentru m_3)

$\Rightarrow k_1\Delta l_1'-m_1g-F=0 \Rightarrow \Delta l_1'=\frac{F+m_1g}{k_1}$

$\Rightarrow k_2\Delta l_2'-k_1\Delta l_1'-m_2g=0 \Rightarrow \Delta l_2'=\frac{F+m_1g+m_2g}{k_2}$

$\frac{\Delta l_1'}{\Delta l_2'}=2=\frac{\frac{F+m_1g}{k_1}}{\frac{F+m_1g+m_2g}{k_2}} \Rightarrow \frac{2\cdot(F+m_1g+m_2g)}{k_2}=\frac{F+m_1g}{k_1}$

$\Rightarrow 2\cdot\frac{(F+5)}{60}=\frac{F+2}{20} \Rightarrow 2F+10=3F+6$

$F=4N$

c)

$N_3'=F_{e_2}'+G_3$

$=(F_{e_1}'+G_2)+G_3$

$=(G_1+F+G_2)+G_3$

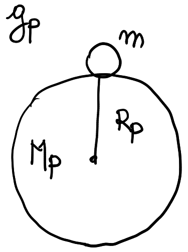
$=(2+4+3)+5=14N$

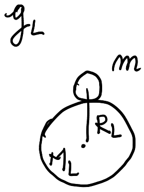
(17) Masa Lunii este de 81 de ori mai mică decât masa Pământului. Diametrul Lunii este 3/11 din diametrul mediu al Pământului. Să se afle accelerația gravitațională medie de la nivelul Lunii.

$$M_L = \frac{M_P}{81}$$

$$(2 \cdot R_L) = \frac{3}{11} \cdot (2 \cdot R_P)$$

$$g_L = ?$$





$$\boxed{F_{atr} = G_P} \Rightarrow k \cdot \frac{M_P \cdot m}{R_P^2} = m \cdot g_P \qquad \boxed{F_{atr} = G_L} \Rightarrow k \cdot \frac{M_L \cdot m}{R_L^2} = m \cdot g_L$$

$$\Rightarrow g_P = \frac{k \cdot M_P}{R_P^2} \qquad \Rightarrow g_L = \frac{k \cdot M_L}{R_L^2}$$

$$\frac{g_P}{g_L} = \frac{\cancel{k} \cdot \frac{M_P}{R_P^2}}{\cancel{k} \cdot \frac{M_L}{R_L^2}} = \left(\frac{M_P}{M_L}\right) \cdot \left(\frac{R_L}{R_P}\right)^2 = 81 \cdot \left(\frac{3}{11}\right)^2 = 6{,}02$$

$$g_L = \frac{g_P}{6{,}02} = \frac{9{,}81}{6{,}02} = 1{,}62 \, \frac{m}{s^2}$$

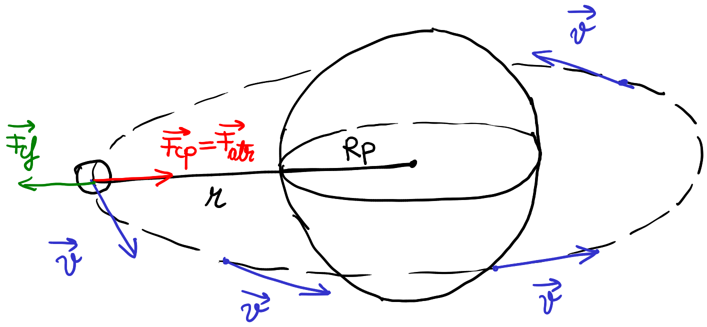
(18) Să se afle valoarea vitezei pe o orbită cu raza $r = 2R_P$ a unei nave cosmice care se rotește în jurul Pământului. Se cunosc raza medie a Pământului $R_P = 6400\,km$ și accelerația gravitațională medie la suprafața Pământului $g_0 = 9{,}8\,\frac{m}{s^2}$

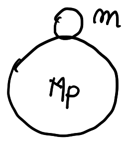
$r = 2R_P$

$R_P = 6400\,km$

$g_0 = 9{,}8\,\frac{m}{s^2}$

$v = ?$





$$F_{atr} = F_{cp}$$

$$k \cdot \frac{m \cdot M_P}{(2R_P)^2} = m \cdot \frac{v^2}{(2R_P)}$$

$$v = \sqrt{\frac{k \cdot M_P}{2 \cdot R_P}}$$

$$F_{atr} = G_0$$

$$k \cdot \frac{m \cdot M_P}{R_P^2} = m \cdot g_0$$

$$g_0 = \frac{k \cdot M_P}{R_P^2}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{k \cdot M_P}{R_P^2} \cdot \frac{R_P}{2}} = \sqrt{g_0 \cdot \frac{R_P}{2}} = \sqrt{9{,}8 \cdot \frac{6400000}{2}} = 5600\,\frac{m}{s}$$

$$v = 5{,}6\,\frac{km}{s}$$

19) Să se afle la ce distanță de centrul Pământului trebuie plasat un satelit geostaționar, care se mișcă pe o traiectorie circulară în planul ecuatorial al Pământului, dacă se cunosc accelerația gravitațională la suprafața Pământului $g_0 = 9{,}81 \frac{m}{s^2}$, raza Pământului $R_P = 6370\ km$, perioada de rotație a Pământului $T = 24h$ și constanta atracției universale $K = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$.

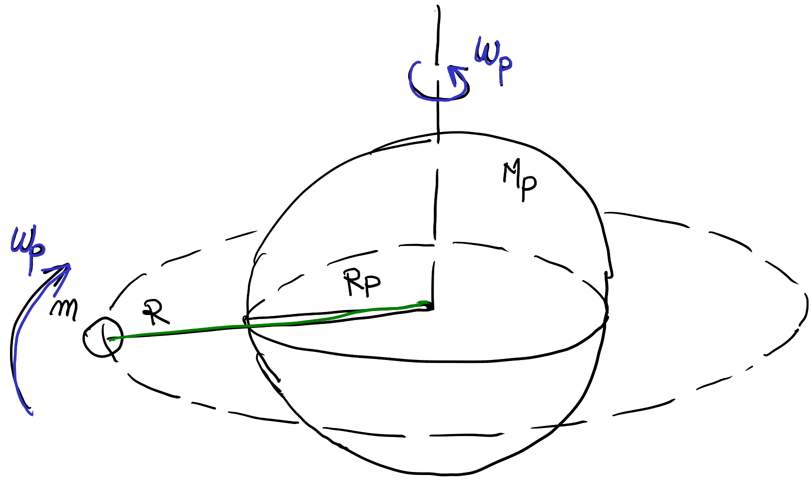
$g_0 = 9{,}81 \frac{m}{s^2}$

$R_P = 6370\ km$

$T_P = 24h$

$K = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$

$R = ?$

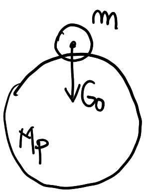


$$\omega_P = \frac{2\pi}{T_P}$$

$$\boxed{F_{atr} = F_{cp}} \Rightarrow K \cdot \frac{M_P \cdot m}{R^2} = m \cdot \omega_P^2 \cdot R$$

$$R^3 = \frac{K \cdot M_P}{\omega_P^2}$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{K \cdot M_P}{\frac{4\pi^2}{T_P^2}}}$$



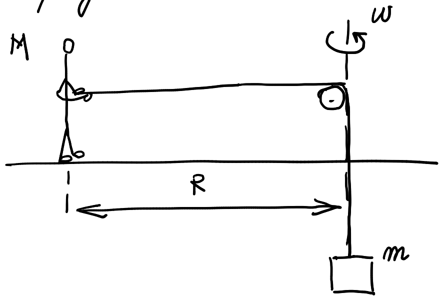
$$\boxed{F_{atr} = G_0} \Rightarrow K \cdot \frac{M_P \cdot m}{R_P^2} = m g_0$$

$$\Rightarrow K M_P = g_0 \cdot R_P^2$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{g_0 \cdot R_P^2 \cdot T_P^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{9{,}81 \cdot (6370000)^2 \cdot (24 \cdot 3600)^2}{4 \cdot \pi^2}}$$

$$R = 42.222\ Km$$

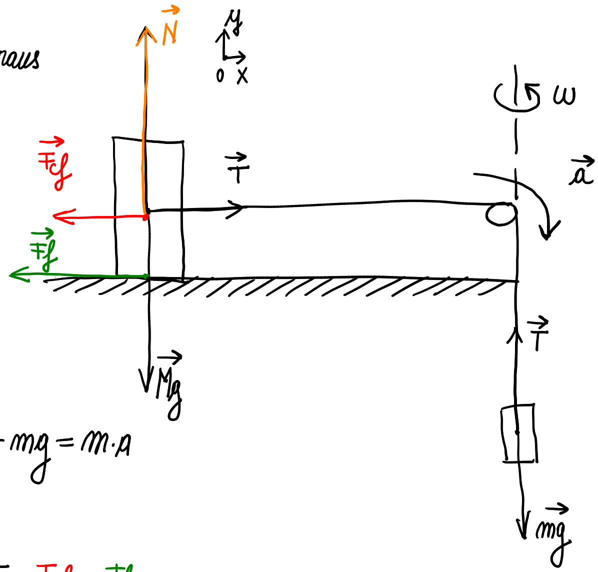
(20) Un om cu masa $M=80kg$ se află pe o platformă care se rotește cu viteza unghiulară $\omega=2\,rad/s$, în jurul unui ax, la distanța $R=50cm$ de axa de rotație. Omul ridică o masă $m=4kg$ cu ajutorul unei frânghii care trece peste un scripete fix ca în figură. Coeficientul de frecare la alunecare dintre om și platformă este $\mu=0,1$. Să se afle între ce limite poate să varieze accelerația cu care omul ridică masa m, pentru ca el să rămână în repaus față de platformă.



$M=80kg$
$\omega=2\,rad/s$
$R=50cm=0,5m$
$m=4kg$
$\mu=0,1$

$(a_{min}, a_{max})=?$, M în repaus

Tendința de mișcare înspre dreapta:



Principiul II (pentru m): $\left\{ T-mg=m\cdot a \right.$

Principiul II (pentru M): $\left\{ \begin{array}{l} T-\vec{F}_{cf}-\vec{F}_f=0 \\ N=Mg \end{array} \right.$

$\Rightarrow T=ma+mg$

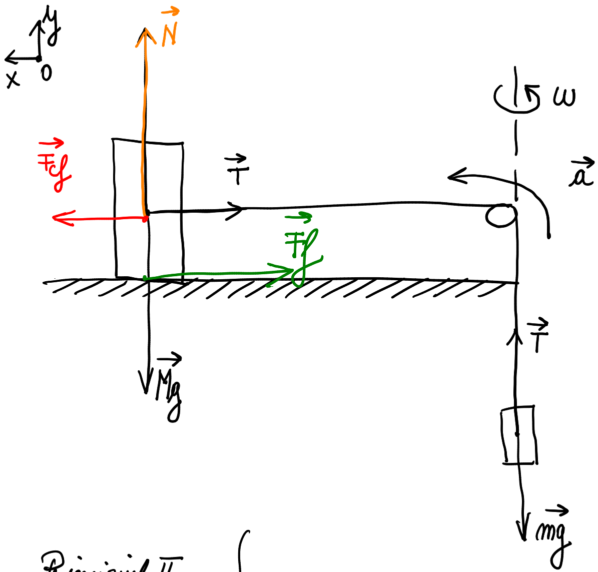
$\Rightarrow (ma+mg)-M\omega^2R-\mu Mg=0$

$$m\cdot a=\mu Mg+M\omega^2R-mg$$

$$a=\frac{\mu Mg-mg+M\omega^2R}{m}$$

$$a=\frac{0,1\cdot 80\cdot 10-4\cdot 10+80\cdot 2^2\cdot 0,5}{4}=\frac{40+160}{4}=50\frac{m}{s}$$

Tendința de mișcare înspre stânga:



Principiul II (pentru m): $\left\{ T-mg=m\cdot a \right.$

Principiul II (pentru M): $\left\{ \begin{array}{l} T-\vec{F}_{cf}+\vec{F}_f=0 \\ N=Mg \end{array} \right.$

$\Rightarrow T=ma+mg$

$\Rightarrow (ma+mg)-M\omega^2R+\mu Mg=0$

$$m\cdot a=M\omega^2R-mg-\mu Mg$$

$$a=\frac{M\omega^2R-mg-\mu Mg}{m}$$

$$a=\frac{80\cdot 2^2\cdot 0,5-4\cdot 10-0,1\cdot 80\cdot 10}{4}$$

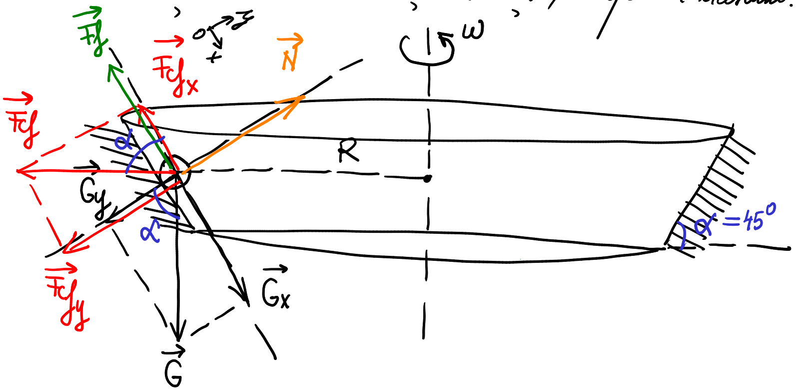
$$a=\frac{160-40-80}{4}=10\frac{m}{s}$$

$\Rightarrow a\in(10,50)\,\frac{m}{s^2}$

(21) Pe un „zid al morții" înclinat față de orizontală cu unghiul $\alpha=45^\circ$ se rotește un motociclist descriind un cerc în plan orizontal cu raza $R=2m$. Știind că mișcarea se face cu frecare, coeficientul de frecare la alunecare este $\mu=0,2$, să se afle viteza unghiulară de rotație a motociclistului și accelerația centripetă a acestuia.

$\alpha=45^\circ$
$R=2m$
$\mu=0,2$

$\omega=?$
$a_{cp}=?$



$$\begin{cases} G_x=G\sin\alpha \\ G_y=G\cos\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} F_{cf_x}=F_{cf}\cos\alpha \\ F_{cf_y}=F_{cf}\sin\alpha \end{cases}$$

Principiul II: $\begin{cases} ox: \; G_x-F_{cx}-F_f=0 \\ oy: \; N=G_y+F_{cf_y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mg\sin\alpha - m\omega^2R\cdot\cos\alpha-\mu N=0 \\ N=mg\cos\alpha+m\omega^2R\sin\alpha \end{cases}$

$$\Rightarrow mg\sin\alpha - m\omega^2R\cos\alpha - \mu(mg\cos\alpha+m\omega^2R\sin\alpha)=0$$

$$\cancel{m}g\sin\alpha - \cancel{m}\omega^2R\cos\alpha - \mu\cancel{m}g\cos\alpha - \mu\cancel{m}\omega^2R\sin\alpha=0$$

$$g\sin\alpha-\mu g\cos\alpha=\mu\omega^2R\sin\alpha+\omega^2R\cos\alpha$$

$$\omega^2=\frac{g\cdot(\sin\alpha-\mu\cdot\cos\alpha)}{R\cdot(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)}$$

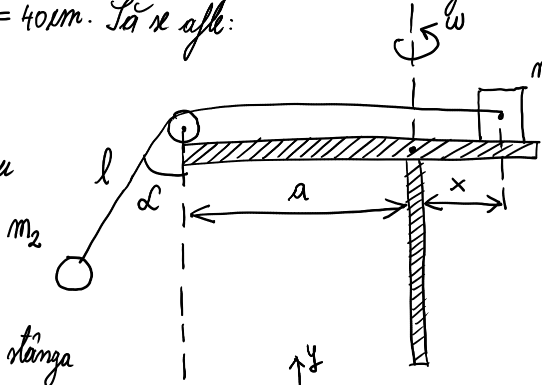
$$\omega=\sqrt{\frac{g\cdot(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)}{R(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)}}=\sqrt{\frac{10\cdot\left(\frac{\sqrt2}{2}-0,2\cdot\frac{\sqrt2}{2}\right)}{2\cdot\left(\frac{\sqrt2}{2}+0,2\cdot\frac{\sqrt2}{2}\right)}}=\sqrt{5\cdot\frac{(1-0,2)}{(1+0,2)}}=\sqrt{5\cdot\frac{0,8}{1,2}}=\sqrt{5\cdot\frac{\cancel{8}^{2}}{\cancel{12}_{3}}}=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt3}$$

$$\omega=1,825\,\frac{rad}{s}$$

$$a_{cp}=\omega^2R=\frac{10}{3}\cdot2=6,67\,\frac{m}{s^2}$$

(22) Pe o tijă verticală care se rotește este așezată o scândură orizontală pe care se află la distanța x de axa de rotație un corp cu masa $m_1 = 200\,g$. Coeficientul de frecare la alunecare al corpului m_1 față de scândură este $\mu = 0{,}2$. De corp este prins un fir ideal trecut peste un scripete aflat la distanța $a = 20\,cm$ de axa de rotație. De capătul celălalt al firului este prins un corp cu masa $m_2 = 100\,g$. În timpul rotației firul care susține corpul cu masa m_2 formează cu verticala un unghi $\alpha = 60°$ ca în figură. Lungimea firului este $l = 40\,cm$. Să se afle:

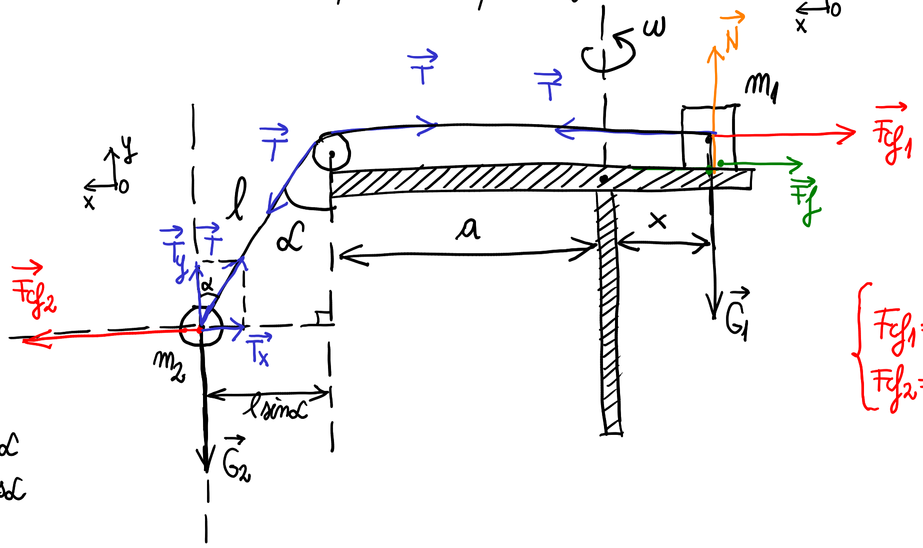
a) tensiunea în fir și reacțiunea în axa scripetelui
b) viteza unghiulară
c) valoarea x astfel ca sistemul să rămână în echilibru



$m_1 = 200g = 0{,}2\,kg$
$\mu = 0{,}2$
$a = 20\,cm = 0{,}2\,m$
$m_2 = 100g = 0{,}1\,kg$
$\alpha = 60°$
$l = 40\,cm = 0{,}4\,m$

a) $T = ?$, $R = ?$
b) $\omega = ?$
c) $x = ?$, repaus

Tendința de mișcare a corpului m_1 înspre stânga



$$\begin{cases} Ff_1 = m_1\omega^2 \cdot x \\ Ff_2 = m_2\omega^2 \cdot (a + l\sin\alpha) \end{cases}$$

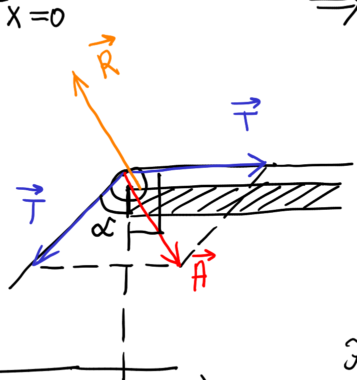
$$\begin{cases} T_x = T\sin\alpha \\ T_y = T\cos\alpha \end{cases}$$

Principiul II (pentru m_1): $\begin{cases} Ox: & T - Ff - Ff_1 = 0 \\ Oy: & N = G_1 \end{cases}$

Principiul II (pentru m_2): $\begin{cases} Ox: & T_x = Ff_2 \\ Oy: & T_y = G_2 \end{cases}$

$\Rightarrow T - \mu m_1 g - m_1\omega^2 x = 0$

$\Rightarrow T\sin\alpha = m_2\omega^2(a + l\sin\alpha)$
$T\cos\alpha = m_2 g$



a) $T = \dfrac{m_2 g}{\cos\alpha} = \dfrac{0{,}1 \cdot 10}{\frac{1}{2}} = 2N$

$A = \sqrt{T^2 + T^2 + 2TT\cos(\alpha + 90°)}$
$A = T\sqrt{1 + 1 + 2 \cdot \cos 150°}$
$A = 2\sqrt{2 + 2 \cdot (-0{,}866)}$
$A = 1{,}035\,N$

! Obs Firul acționează asupra scripetelui prin cele două tensiuni $\vec{T}$ și $\vec{T}$.

Folosind regula paralelogramului aflăm rezultanta celor două tensiuni $\vec{T}$, adică forța $\vec{A}$ cu care apasă scripetele pe scândură. Scândura reacționează la această forță de apăsare $\vec{A}$ cu forța de reacțiune $\vec{R}$ egală în modul

$A = R \Rightarrow$ scripetele este fix (în repaus)

b) $\omega = \sqrt{\dfrac{T\sin\alpha}{m_2(a + l\sin\alpha)}}$

$\omega = \sqrt{\dfrac{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{0{,}1 \cdot (0{,}2 + 0{,}4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2})}}$

$\omega = 5{,}63\ \dfrac{rad}{s}$

c) $T - \mu m_1 g - m_1\omega^2 x = 0$

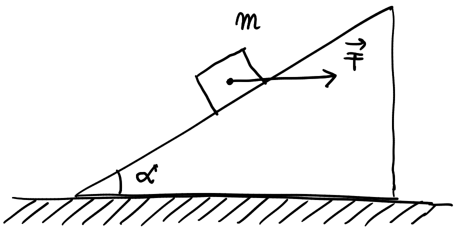
$x = \dfrac{T - \mu m_1 g}{m_1\omega^2} = \dfrac{2 - 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 10}{0{,}2 \cdot (5{,}63)^2} = 0{,}25\,m = 25\,cm$

23 Asupra unui corp cu masa $m=2kg$ aflat pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha=30^\circ$ acționează o forță orizontală $F=30N$, ca în figură. Coeficientul de frecare pe planul înclinat este $\mu=\frac{1}{2\sqrt{3}}$. Să se afle:

a) accelerația corpului pe plan

b) forța pentru care corpul urcă uniform

c) accelerația minimă orizontală cu care trebuie împins planul înclinat pentru ca acest corp să înceapă să urce uniform pe plan în lipsa forței F

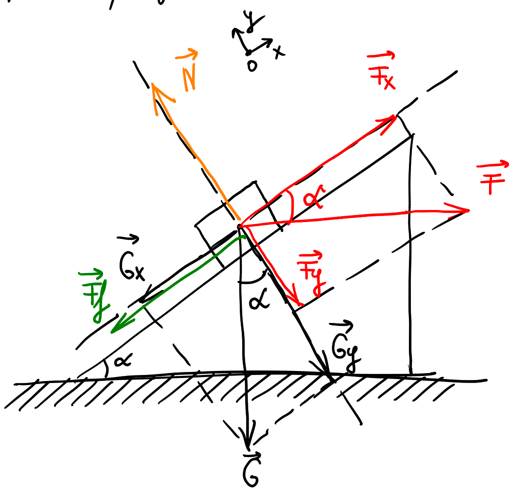


$m=2kg$
$\alpha=30^\circ$
$F=30N$
$\mu=\frac{1}{2\sqrt{3}}$

---

a) $a=?$
b) $F'=?$, MRU
c) $a_{plan}=?$, MRU

a)



$G_x = G\sin\alpha$
$G_y = G\cos\alpha$
$F_x = F\cos\alpha$
$F_y = F\sin\alpha$

Principiul II

$0x: \quad F_x - G_x - F_f = m\cdot a$
$0y: \quad N - F_y - G_y = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} F\cos\alpha - mg\sin\alpha - \mu N = ma \\ N = mg\cos\alpha + F\sin\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow F\cos\alpha - mg\sin\alpha - \mu\cdot(mg\cos\alpha + F\sin\alpha) = ma$$

$$a = \frac{F\cdot(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) - mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{m}$$

$$a = \frac{30\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}\right) - 2\cdot 10\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2}$$

$$a = \frac{15}{2}\cdot\left(\sqrt{3} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) - 10\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) =$$

$$= \frac{15}{2}\cdot\frac{5}{2\sqrt{3}} - 10\frac{3}{4} = 3{,}32\ \frac{m}{s^2}$$

b)

Urcare uniformă

Principiul II

$0x: \quad F_x' - G_x - F_f' = 0$
$0y: \quad N' - F_y' - G_y = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} F'\cos\alpha - mg\sin\alpha - \mu N' = 0 \\ N' = mg\cos\alpha + F'\sin\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow F'\cos\alpha - mg\sin\alpha - \mu\cdot(mg\cos\alpha + F'\sin\alpha) = 0$$

$$F'\cdot(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) - mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = 0$$

$$F' = \frac{mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha} = \frac{2\cdot 10\cdot\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}}$$

$$F' = \frac{10\left(1 + \frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{4\sqrt{3}}} = \frac{10\cdot\frac{3}{2}}{\frac{5}{4\sqrt{3}}} = 12\sqrt{3} = 20{,}78N$$

c) Principiul II (SRNi)

mișcare uniformă

$0x: \quad F_{ix} - G_x - F_f = 0$
$0y: \quad N = F_{iy} + G_y$

$$\Rightarrow m\cdot a_{plan}\cos\alpha - mg\sin\alpha - \mu\cdot(m\cdot a_{plan}\sin\alpha + mg\cos\alpha) = 0$$

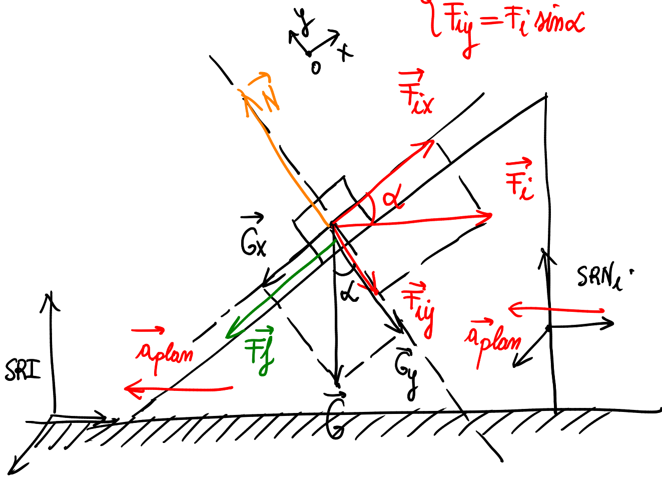
$$a_{plan} = \frac{mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha}{m\cos\alpha - \mu m\sin\alpha} = \frac{g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}$$

$$= \frac{10\cdot\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{5\cdot\frac{3}{2}}{\frac{5}{4\sqrt{3}}} = 6\sqrt{3} = 10{,}38\ \frac{m}{s^2}$$

c)

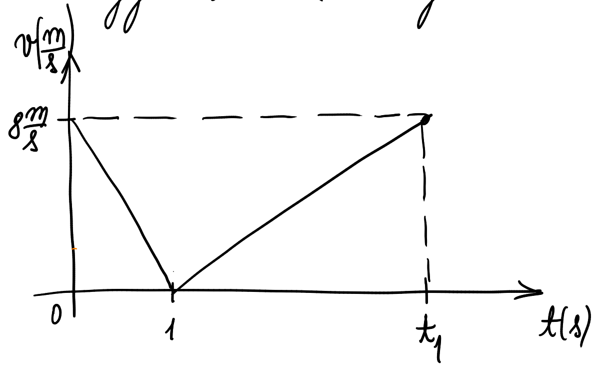
$F_i = m\cdot a_{plan}$

$$\begin{cases} F_{ix} = F_i\cos\alpha \\ F_{iy} = F_i\sin\alpha \end{cases}$$



(24) Pe un plan înclinat cu unghiul α $(\sin\alpha = 0{,}6)$ este lansat dintr-un punct de-alungul planului un corp. Reprezentarea grafică a vitezei corpului în funcție de timp este redată în figura alăturată. Să se afle:

a) distanța parcursă de corp până la oprire
b) coeficientul de frecare
c) valoarea t_1 după care corpul revine la coborâre la valoarea inițială a vitezei
d) distanța totală parcursă de corp până când viteza revine la valoarea inițială



$\sin\alpha = 0{,}6$

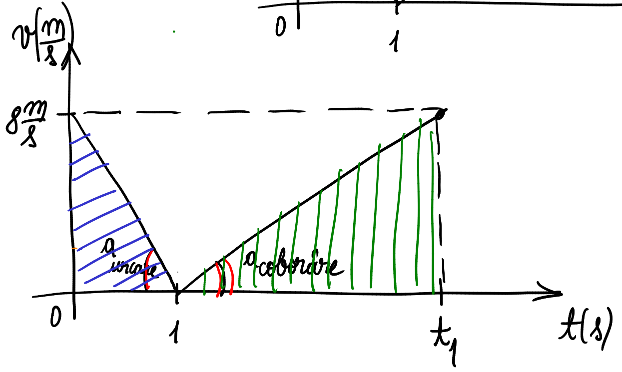
$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-(0{,}6)^2} = 0{,}8$

a) $d = ?$

b) $\mu = ?$

c) $t_1 = ?$

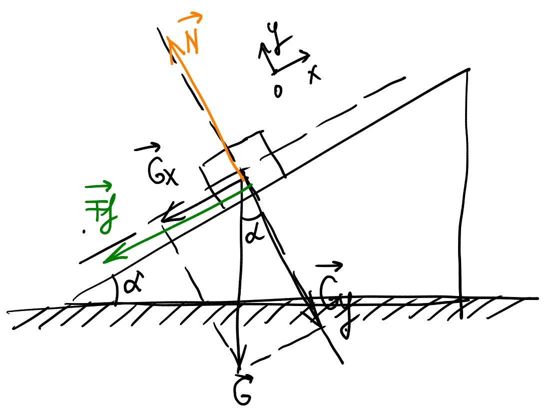
d) $d_{totală} = ?$



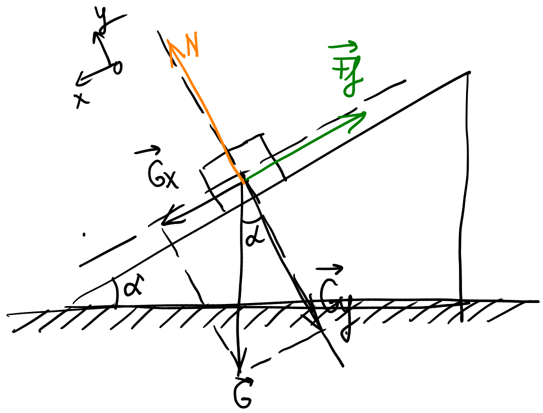
a) $d = A_{\triangle} = \frac{c_1 \cdot c_2}{2} = \frac{8 \cdot 1}{2} = 4\,m$

b)

la urcare



la coborâre



$G_x = G\sin\alpha$

$G_y = G\cos\alpha$

Principiul II

$$\begin{cases} Ox: & -F_f - G_x = m \cdot a_{urcare} \\ Oy: & N = G_y \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\mu mg\cos\alpha - mg\sin\alpha = m \cdot a_{urcare}$$

$$a_{urcare} = -g(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)$$

Principiul II

$$\begin{cases} Ox: & G_x - F_f = m \cdot a_{coborâre} \\ Oy: & N = G_y \end{cases}$$

$$\Rightarrow mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = m \cdot a_{coborâre}$$

$$a_{coborâre} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

Din grafic $a_{urcare} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0\frac{m}{s} - 8\frac{m}{s}}{1s - 0s} = -8\frac{m}{s^2}$

$$\Rightarrow -8 = -10 \cdot (\mu \cdot 0{,}8 + 0{,}6)$$

$$8 = \mu \cdot 8 + 6$$

$$2 = \mu \cdot 8 \Rightarrow \mu = 0{,}25$$

c) $a_{coborâre} = 10 \cdot \left(0{,}6 - \frac{1}{4} \cdot 0{,}8\right) = 4\,m/s^2$

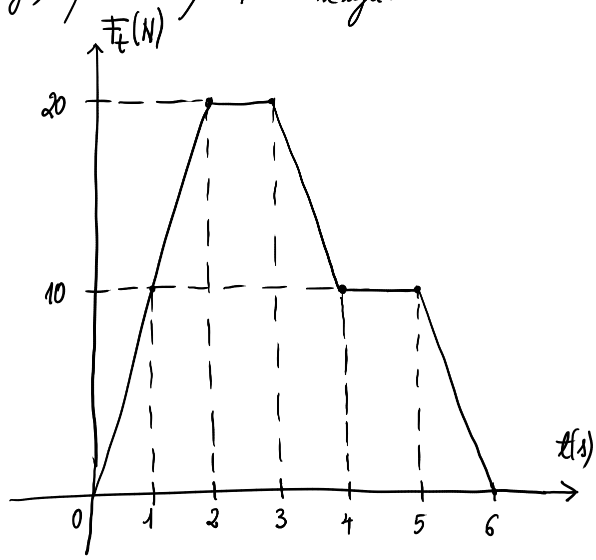
$a_{coborâre} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{8}{t_1 - 1} = 4 \Rightarrow t_1 = 3\,s$

d) $d_{totală} = A_{\triangle} + A_{\triangle} = 4m + \frac{c_1 c_2}{2}$

$= 4 + \frac{8 \cdot 2}{2} = 12\,m$

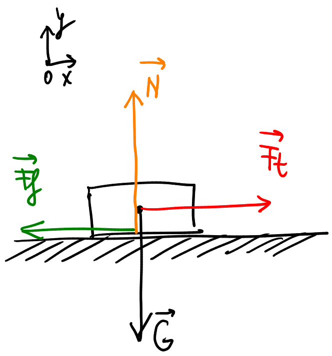
(25) Un bloc de beton de masă $m = 10kg$, aflat inițial în repaus pe o suprafață plană și orizontală, este supus unei forțe de tracțiune paralelă cu suprafața orizontală. Forța de tracțiune își păstrează direcția, iar modulul ei se modifică în timp conform graficului din figura alăturată. Coeficientul de frecare dintre blocul de beton și suprafața plană este $\mu = 0{,}1$. Să se afle:

a) viteza blocului de beton în intervalul de timp $t \in [0,1]s$
b) accelerația blocului de beton în intervalul de timp $t \in [2,3]s$
c) forța de frecare dintre blocul de beton și suprafața orizontală în intervalul de timp $t \in [1,6]s$ și la momentul $t = 0{,}3s$
d) forța rezultantă care acționează asupra blocului în intervalul de timp $t \in [4,5]s$



$m = 10kg$
$\mu = 0{,}1$

a) $v = ?$, $t \in [0,1]s$
b) $a = ?$, $t \in [2,3]s$
c) $F_f = ?$, $t \in [1,6]s$ și $t = 0{,}3s$
d) $R = ?$, $t \in [4,5]s$



a) $F_f = \mu \cdot N = \mu m g = 0{,}1 \cdot 10 \cdot 10 = 10N$

$\Rightarrow$ până când forța de tracțiune $\vec{F_t}$ nu atinge pragul de $10N$ corpul rămâne în repaus

$\Rightarrow$ $t \in [0,1]s$ repaus $\Rightarrow v = 0\frac{m}{s}$

b) $F_t - F_f = m \cdot a$

$20N - 10N = 10 \cdot a \Rightarrow a = 1\frac{m}{s^2} = const$ în $t \in [2,3]s$

c) $F_f = \mu m g = 0{,}1 \cdot 10 \cdot 10 = 10N$, $t \in [1,6]s$ $\Rightarrow$ forța de frecare la alunecare

$F_{fs} = F_t(0{,}3s)$

$t \in [0,1]s$ $\quad F_t - F_{fs} = 0$ (repaus) $\quad \Rightarrow \quad F_f(0{,}3s) = F_t = 3N$

$1s \ldots\ldots 10N$
$0{,}3s \ldots\ldots F_t = 3N$

d) $t \in [4,5]s$

$F_t = 10N$

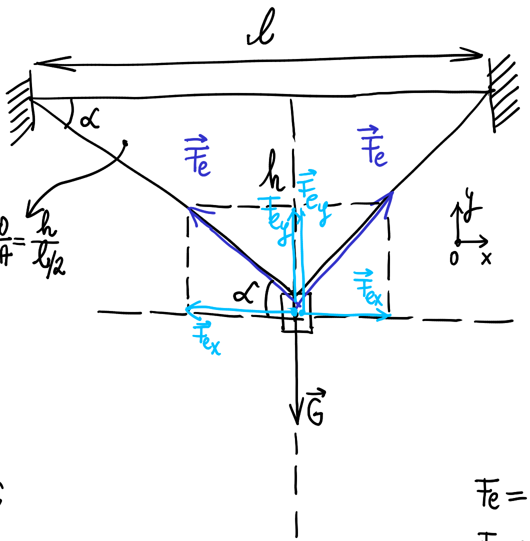
$F_t - F_f = R$

$10N - 10N = 0N \quad \Rightarrow \quad R = 0N$ (MRU)

(26) O sârmă cu lungimea $l = 2m$ și diametrul $d = 1mm$ este fixată la ambele capete în poziție orizontală. Dacă la mijlocul său se atârnă un corp cu masa $m = 1kg$, sârma coboară în acel punct cu $h = 4cm$. Să se determine modulul de elasticitate Young pentru materialul sârmei.

$l = 2m$
$d = 1mm$
$m = 1kg$
$h = 4cm = 0{,}04m$

$E = ?$



$tg\alpha = \frac{CO}{CA} = \frac{h}{l/2}$

$$\begin{cases} F_{ex} = F_e \cos\alpha \\ F_{e_y} = F_e \sin\alpha \end{cases}$$

Principiul II : $\begin{cases} Ox: \ F_{ex} = F_{ex} \\ Oy: \ 2F_{e_y} = G \end{cases}$

$\Rightarrow 2 \cdot F_e \sin\alpha = mg$

$$F_e = \frac{mg}{\sin\alpha} = \frac{mg}{\sin\left(arctg \frac{h}{l/2}\right)}$$

$$F_e = K \cdot \Delta l$$

$$F_e = \left(\frac{E \cdot S}{l_0}\right) \cdot \Delta l$$

$$F_e = \frac{E \cdot \left[\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2\right]}{l} \cdot \left(2 \cdot \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2} - l\right)$$

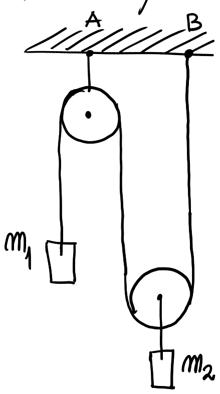
$$\Rightarrow \frac{mg}{\sin\left(arctg \frac{h}{l/2}\right)} = \frac{E \cdot \pi^2 \cdot d^2}{4l} \cdot \left(2\sqrt{\frac{l^2}{4} + h^2} - l\right)$$

$$E = \frac{4l \cdot mg}{\pi^2 d^2 \left(2\sqrt{\frac{l^2}{4} + h^2} - l\right) \sin\left(arctg \frac{h}{l/2}\right)}$$

$$E = \frac{4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 10}{\pi^2 \cdot (10^{-3})^2 \cdot \left(2 \cdot \sqrt{\frac{2^2}{4} + 0{,}04^2} - 2\right) \sin\left(arctg \frac{0{,}04}{1}\right)}$$

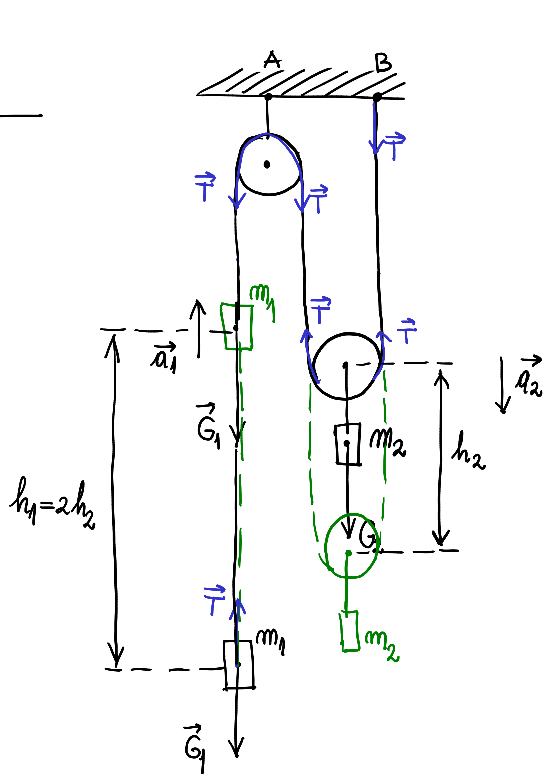
$$E = \frac{80}{\pi^2 \cdot 10^{-6} \cdot (0{,}001599361) \cdot (0{,}039968038)} = 8{,}85 \cdot 10^7 \frac{N}{m^2}$$

27) Două corpuri cu masele $m_1 = 1kg$ și $m_2 = 3kg$ sunt suspendate de un sistem de scripeți mobili, ca în figură. Să se determine forțele cu care acționează sistemul asupra plafonului în punctele A și B.



$m_1 = 1kg$
$m_2 = 3kg$

$N_A = ?$
$N_B = ?$



! Obs: În timp ce corpul m_2 urcă pe distanța h_2, corpul m_1 coboară pe distanța dublă $h_1 = 2h_2$.

Principiul II:
$$T - m_1 g = m_1 \cdot a_1 \quad (\text{pentru } m_1)$$
$$m_2 g - 2T = m_2 \cdot a_2 \quad (\text{pentru } m_2)$$

dar: $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$

$$h_2 = \frac{a_2 t^2}{2}$$
$$h_1 = \frac{a_1 t^2}{2}$$
$$\Rightarrow \frac{\cancel{2}h_2}{a_2} = \frac{\cancel{2}h_1}{a_1}$$
$$\frac{\cancel{h_2}}{a_2} = \frac{2\cancel{h_2}}{a_1} \Rightarrow a_1 = 2a_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T - m_1 g = m_1 \cdot (2a_2) \quad | \cdot 2 \\ m_2 g - 2T = m_2 \cdot a_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} 2T - 2m_1 g &= 4m_1 a_2 \\ m_2 g - 2T &= m_2 a_2 \end{aligned}$$

$\oplus$
$$m_2 g - 2m_1 g = (4m_1 + m_2)\, a_2$$

$$a_2 = \frac{g(m_2 - 2m_1)}{4m_1 + m_2} = \frac{10 \cdot (3 - 2 \cdot 1)}{4 \cdot 1 + 3} = 1{,}428 \frac{m}{s^2}$$

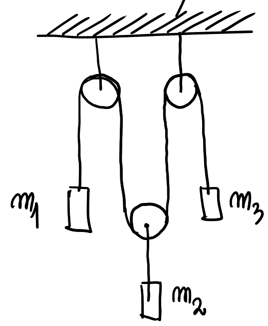
$$a_1 = 2 \cdot a_2 = 2{,}857 \frac{m}{s^2}$$

$$T = m_1 a_1 + m_1 g = 1 \cdot 2{,}857 + 1 \cdot 10 = 12{,}857 N$$

$\Rightarrow N_A = 2T = 25{,}714 N$

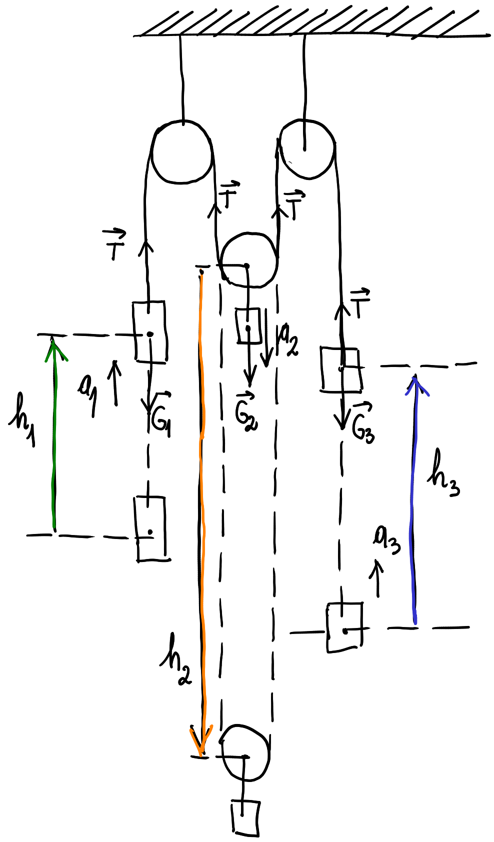
$\Rightarrow N_B = T = 12{,}857 N$

(28) Să se determine accelerațiile celor trei corpuri din figură. Ramurile firului care susțin scripetele mobil sunt verticale.



m_1
m_2
m_3

$a_1, a_2, a_3 = ?$



m_1 urcă pe distanța $h_1 \Rightarrow m_2$ coboară pe distanța $\frac{h_1}{2}$
m_3 urcă pe distanța $h_3 \Rightarrow m_2$ coboară pe distanța $\frac{h_3}{2}$

$$\Rightarrow h_2 = \frac{h_1}{2} + \frac{h_3}{2}$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

$$h_1 = \frac{a_1 t^2}{2}$$

$$h_2 = \frac{a_2 \cdot t^2}{2}$$

$$h_3 = \frac{a_3 t^2}{2}$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{a_1}{2} + \frac{a_3}{2}$$

Principiul II

$T - m_1 g = m_1 a_1$ (pentru m_1)
$m_2 g - 2T = m_2 a_2$ (pentru m_2)
$T - m_3 g = m_3 a_3$ (pentru m_3)

$$\begin{array}{l} 2T - 2m_1 g = 2m_1 a_1 \\ m_2 g - 2T = m_2 a_2 \\ \hline \oplus \quad m_2 g - 2m_1 g = 2m_1 a_1 + m_2 a_2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} m_2 g - 2T = m_2 a_2 \\ 2T - 2m_3 g = 2m_3 a_3 \\ \hline \oplus \quad m_2 g - 2m_3 g = m_2 a_2 + 2m_3 a_3 \end{array}$$

$$g(m_2 - 2m_1) = 2m_1 a_1 + m_2 a_2 \Rightarrow a_1 = \frac{g(m_2 - 2m_1) - m_2 a_2}{2m_1}$$

$$g(m_2 - 2m_3) = 2m_3 a_3 + m_2 a_2 \Rightarrow a_3 = \frac{g(m_2 - 2m_3) - m_2 a_2}{2m_3}$$

$$\Rightarrow {}^{\backslash 4m_1m_3} a_2 = \frac{a_1}{2} + \frac{a_3}{2} = {}^{\backslash m_3}\frac{g(m_2 - 2m_1) - m_2 a_2}{4m_1} + {}^{\backslash m_1}\frac{g(m_2 - 2m_3) - m_2 a_2}{4m_3}$$

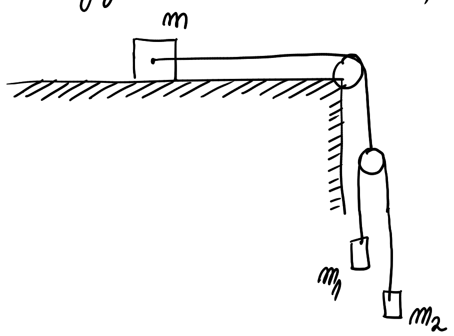
$$a_2 \cdot 4m_1 m_3 = g(m_2 - 2m_1)m_3 - m_2 m_3 a_2 + g(m_2 - 2m_3)m_1 - m_1 m_2 a_2$$

$$a_2 \cdot (4m_1 m_3 + m_2 \cdot m_3 + m_1 m_2) = m_2 m_3 g - 2m_1 m_3 g + m_1 m_2 g - 2m_1 m_3 g$$

$$a_2 = \frac{m_2 g(m_1 + m_3) - 4m_1 m_3 g}{4m_1 m_3 + m_2 m_3 + m_1 m_2}, \quad a_1 = \frac{g(m_2 - 2m_1) - m_2 a_2}{2m}$$

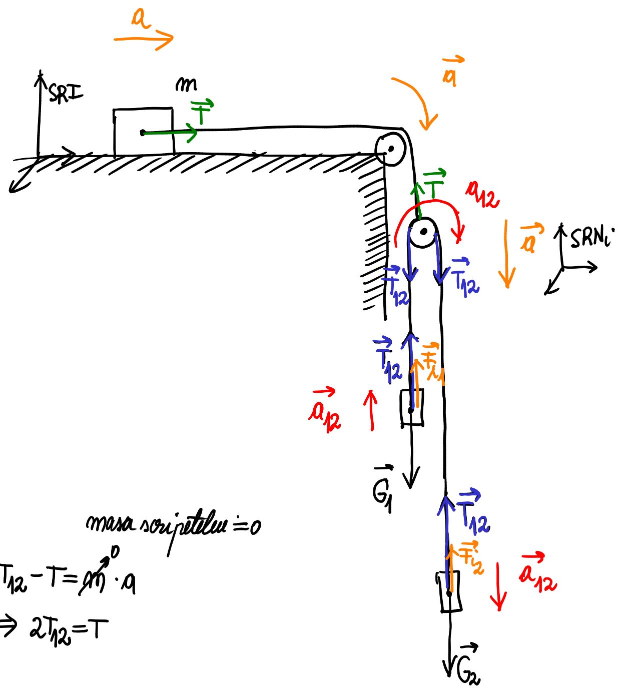
$$a_3 = \frac{g(m_2 - 2m_3) - m_2 a_2}{2m}$$

(29) Cunoscând masele corpurilor din figură și faptul că frecările sunt neglijabile, să se determine accelerația corpului de masă m_1.

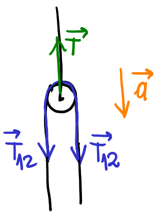


m
m_1
m_2

$a_1' = ?$



$$a_1' = a_{12} - a$$



masa scripetelui = 0

$$2T_{12} - T = \cancel{m}^{0} \cdot a$$

$$\Rightarrow 2T_{12} = T$$

Principiul II

SRI : $T = m \cdot a$ (pentru m)

SRNi : $T_{12} + F_{i1} - G_1 = m_1 \cdot a_{12}$ (pentru m_1)

$G_2 - F_{i2} - T_{12} = m_2 \cdot a_{12}$ (pentru m_2)

$$\Rightarrow 2T_{12} = m \cdot a$$

$$T_{12} = \frac{m \cdot a}{2}$$

$$\Rightarrow T_{12} + m_1 a - m_1 g = m_1 a_{12}$$

$$m_2 g - m_2 a - T_{12} = m_2 \cdot a_{12}$$

$$\oplus \quad (m_2 - m_1)g + (m_1 - m_2)a = (m_1 + m_2)a_{12} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{m \cdot a}{2} + m_1 a - m_1 g = m_1 a_{12} \quad (2)$$

$$m \cdot a + 2m_1 a - 2m_1 g = 2m_1 a_{12}$$

$$a = \frac{2m_1 a_{12} + 2m_1 g}{(m + 2m_1)} \longrightarrow$$

$$(m_2 - m_1)g + (m_1 - m_2) \cdot \frac{2m_1 a_{12} + 2m_1 g}{(m + 2m_1)} = (m_1 + m_2)a_{12}$$

$$(m_2 - m_1)g + \frac{2m_1(m_1 - m_2)}{m + 2m_1} \cdot a_{12} + \frac{2m_1(m_1 - m_2)g}{m + 2m_1} = (m_1 + m_2)a_{12}$$

$$(m_2 - m_1)g + \frac{2m_1(m_1 - m_2)g}{m + 2m_1} = a_{12} \cdot \left[(m_1 + m_2) - \frac{2m(m_1 - m_2)}{m + 2m_1}\right]$$

$$a_{12} = \frac{(m_2 - m_1)g + \frac{2m_1(m_1 - m_2)g}{m + 2m_1}}{(m_1 + m_2) - \frac{2m(m_1 - m_2)}{m + 2m_1}}$$

$$\Rightarrow a = \frac{2m_1 \left[\frac{(m_2 - m_1)g + \frac{2m_1(m_1 - m_2)g}{m + 2m_1}}{(m_1 + m_2) - \frac{2m(m_1 - m_2)}{m + 2m_1}}\right] + 2m_1 g}{(m + 2m_1)}$$

$$a_1' = a_{12} - a = a_{12} - \frac{2m_1 a_{12} + 2m_1 g}{(m+2m_1)} = \frac{a_{12} m + \cancel{a_{12} 2m_1} - \cancel{2m_1 a_{12}} + 2m_1 g}{(m+2m_1)}$$

$$\boxed{a_1' = \frac{\left[\dfrac{(m_2-m_1)g + \dfrac{2m_1(m_1-m_2)g}{m+2m_1}}{(m_1+m_2) - \dfrac{2m(m_1-m_2)}{m+2m_1}}\right]\cdot m + 2m_1 g}{m+2m_1}}$$

$$a_1' = \frac{\left[\dfrac{(m+2m_1)(m_2-m_1)g + 2m_1(m_1-m_2)g}{(m+2m_1)(m_1+m_2) - 2m(m_1-m_2)}\right]\cdot m + 2m_1 g \cdot \dfrac{[(m+2m_1)(m_1+m_2) - 2m(m_1-m_2)]}{(m+2m_1)(m_1+m_2) - 2m(m_1-m_2)}}{m+2m_1}$$

$$a_1' = \frac{m^2 m_2 g - m^2 m_1 g + \cancel{2m_1 m_2 m g} - \cancel{2m_1^2 m g} + 2m_1^2 m g - \cancel{2m_1 m_2 m g} + \cancel{2m_1^2 m g} + 2m_1 m_2 m g + 4m_1^3 g + 4m_1^2 m_2 g - 4m m_1^2 g + 4m m_1 m_2 g}{(m+2m_1)\cdot[(m+2m_1)(m_1+m_2) - 2m(m_1-m_2)]}$$

$$a_1' = \frac{m^2 m_2 g - m^2 m_1 g - 2m m_1^2 g + 6m m_1 m_2 g + 4m_1^2 m_2 g + 4m_1^3 g}{(m+2m_1)\cdot[m m_1 + m m_2 + 2m_1^2 + 2m_1 m_2 - 2m m_1 + 2m m_2]}$$

$$a_1' = \frac{m^2 m_2 g - m^2 m_1 g - 2m m_1^2 g + 6m m_1 m_2 g + 4m_1^2 m_2 g + 4m_1^3 g}{(m+2m_1)(3m m_2 - m m_1 + 2m_1 m_2 + 2m_1^2)}$$

$$a_1' = \frac{m^2 m_2 g - m^2 m_1 g - 2m m_1^2 g + 6m m_1 m_2 g + 4m_1^2 m_2 g + 4m_1^3 g}{3m^2 m_2 - m^2 m_1 + 2m_1 m_2 m + \cancel{2m_1^2 m} + 6m m_1 m_2 - \cancel{2m_1^2 m} + 4m_1^2 m_2 + 4m_1^3}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_1' = \frac{m^2 m_2 g - m^2 m_1 g - 2m m_1^2 g + 6m m_1 m_2 g + 4m_1^2 m_2 g + 4m_1^3 g}{3m^2 m_2 - m^2 m_1 + 8m m_1 m_2 + 4m_1^2 m_2 + 4m_1^3}}$$

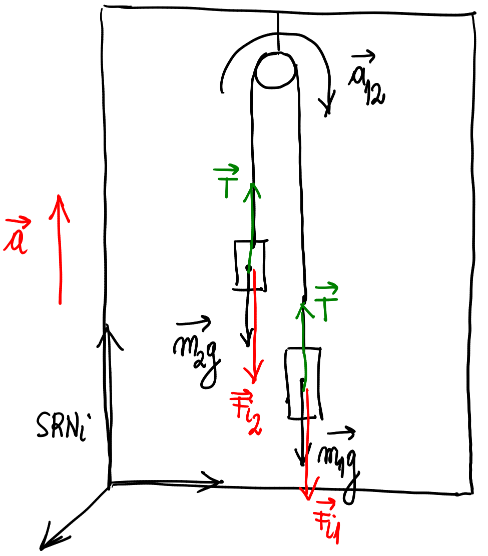
(30) Peste un scripete fixat de tavanul cabinei unui ascensor este trecut un fir inextensibil la capetele căruia se află două corpuri cu masele $m_1 > m_2$. Ascensorul este ridicat cu accelerația a. Să se determine accelerația corpului 1 față de casa liftului și față de cabină.

$m_1 > m_2$

a

$a_{12} = ?$ (SRNi)

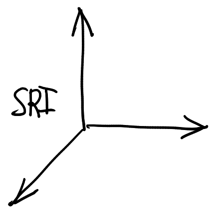
$a_1 = ?$ (SRI)



$F_{i_1} = m_1 a$

$F_{i_2} = m_2 a$

$\Rightarrow$ forțe de inerție suplimentare adăugate doar în SRNi pentru a respecta Principiul II



Principiul II (în SRNi): $m_1 g + F_{i_1} - T = m_1 \cdot a_{12}$ (pentru m_1)

$T - F_{i_2} - m_2 g = m_2 \cdot a_{12}$ (pentru m_2)

$$\Rightarrow \begin{array}{l} m_1 g + m_1 a - T = m_1 a_{12} \\ T - m_2 a - m_2 g = m_2 \cdot a_{12} \end{array}$$

$\oplus$ $(m_1 - m_2) g + (m_1 - m_2) a = (m_1 + m_2) a_{12} \Rightarrow a_{12} = \dfrac{(m_1 - m_2)(a + g)}{m_1 + m_2}$ - accelerația corpului m_1 față de cabina liftului

a_1 - accelerația corpului m_1 față de sol

$$a_1 = a - a_{12}$$

$$a_1 = a - \frac{(m_1 - m_2)(a + g)}{m_1 + m_2} = \frac{a m_1 + \cancel{a m_2} + a m_1 - \cancel{a m_2} + m_1 g - m_2 g}{m_1 + m_2}$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{2 m_1 a + (m_1 - m_2) g}{m_1 + m_2}$$